Bachelorarbeit

im Studiengang
Mathematik für das Lehramt

Euler-Zahlen, Euler-Polynome und Überträge in der schriftlichen Addition

vorgelegt von:
Pauline Luisa Charlotte Papenbrock

Matrikelnummer: 5187517
E-Mail: paulinep96@zedat.fu-berlin.de

vorgelegt am: 26. September 2020

Erstgutachter: Prof. Matthias Beck
Zweitgutachter: Dr. Jean-Philippe Labbé

Freie Universität Berlin

Fachbereich für Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik

Eidesstattliche Erklärung zur Bachelorarbeit

Ich versichere an Eides statt, dass ich die Bachelorarbeit selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen und Hilfsmittel wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit hat keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Unterschrift	Datum, Ort

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Es gibt viele Zahlen und Zahlenfolgen, die mit Leonhard Euler in Verbindung gebracht werden. In dieser Arbeit geht es um die Euler-Zahlen, die die Anzahl an Permutationen von S_n beschreiben, die genau k Abstiege haben. Andere Zahlen(-folgen) sind beispielsweise die eulersche Zahl e, die „Euler-Numbers“ (im Deutschen eulersche Zahlen, teilweise aber auch Euler-Zahlen) E_n, (die Folge der alternierenden n-Permutationen [2, S. 36]) sowie die Euler-Zahl Eu (eine dimensionslose Kennzahl der Ähnlichkeitstheorie). Neben den Euler-Zahlen soll eine Einführung in die Euler-Polynome gegeben werden. Diese sind der Grund, weshalb die Euler-Zahlen (nach Eulers Definition) überhaupt entstanden sind.

Der letzte Teil der Arbeit wird den „Carries“ (den Überträgen bei schriftlicher Addition) gewidmet. Dabei soll untersucht werden, wie wahrscheinlich ein bestimmter Übertrag bei der Addition von m beliebigen Zahlen der Länge n ist. Dies ist von Interesse, da uns die Euler-Zahlen bei der Betrachtung wieder begegnen und die Übergangsmatrizen weitere Gemeinsamkeiten mit den Euler-Zahlen aufweisen.

Die Arbeit ist dabei in drei Teile gegliedert. Der erste umfasst die Kapitel 2 und 3 und gibt die wichtigsten Definitionen sowie die rekursiven Bestimmungen der Euler-Zahlen und der Euler-Polynome. Der zweite Teil umfasst Kapitel 4 und 5, in welchen wir uns etwas vertiefter mit den Euler-Zahlen und -Polynomen auseinandersetzen wollen. Der dritte Teil behandelt das Kapitel 6, in dem wir uns mit den Überträgen in der schriftlichen Addition beschäftigen. Wir werden dort sehen, dass wir die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Übertrag durch die Euler-Zahlen berechnen können.

2 Grundlagen

Dieser Abschnitt setzt sich als Ziel, notwendige Grundlagen für die Veranschaulichung und Analyse der Euler-Zahlen und Euler-Polynome zu legen. Zu Beginn wird es eine kurze Wiederholung der Binomialkoeffizienten geben. Dieser dient dazu, Ähnlichkeiten mit den Euler-Zahlen aufzuzeigen, die danach definiert werden sollen. Neben den Euler-Zahlen werden zu dem die Euler-Polynome definiert als auch Gleichungen, in denen sie vorkommen, beschrieben. Als letzter Abschnitt wird ein historischer Einblick erfolgen, der zum einen die ζ-Funktion definiert und beschreibt, was Eulers Ziel bei der Analyse der ζ-Funktion (beziehungsweise der η-Funktion) war, zu anderen den Zusammenhang mit der Thematik dieser Arbeit erläutert.

2.1 Die Binomialkoeffizienten

Bevor wir zu den Euler-Zahlen gelangen, ist es hilfreich für das Verständnis, sich die **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ für $n,k \in \mathbb{N}$ genauer ansehen. Da diese den meisten LeserInnen bekannt sind, wollen wir hier lediglich die wichtigsten Aussagen zusammenfassen und bestimmte Gleichungen in Erinnerung rufen. Die Binomialkoeffizienten beschreiben die Anzahl an möglichen k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Dabei vereinbaren wir als Konvention, dass $\binom{n}{k} = 0$, wenn $n < 0$ oder $k < 0$ sowie wenn $k > n$ ist. Es gibt eine einfache Möglichkeit, die Binomialkoeffizienten zu berechnen, auch wenn dies für große n eher umständlich ist. Bevor wir uns der Rekursion in Proposition 2 zuwenden, konzentrieren wir uns auf eine andere Eigenschaft, die wir später auch auf bei den Euler-Zahlen aufgreifen wollen: Die Symmetrie.

Proposition 1. *Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $k \leq n$ gilt:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition des Binomialkoeffizienten, da es egal ist, ob wir genau k Elemente aus der n-elementigen Menge entnehmen oder ob wir k-Elemente in der Menge lassen und $n-k$ Elemente entnehmen. □

Diese Eigenschaft kann uns das Rechnen von Zeit zu Zeit erleichtern, insbesondere da wir sie analog mit einer kleinen Abwandlung, auf die Euler-Zahlen anwenden können. Um für beliebige n und k die Binomialkoeffizienten zu berechnen, werden nur die zwei Binomialkoeffizienten benötigt, die im Pascalschen Dreieck (Tabelle 1) über dem zu berechnenden Eintrag stehen. Da es sich um eine Tabelle und keine wirkliche Pyramide handelt sind es der direkt darüber stehende Koeffizient sowie dessen linker Nachbar.

Tabelle 1: Pascalsches Dreieck der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 9$.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

.

Proposition 2. [Rekursion der Binomialkoeffizienten] Seien $k, n \in \mathbb{N}$, für alle $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \textit{und} \quad \binom{n}{n} = 1. \tag{1}$$

Beweis. Für den Rekursionsanfang gilt, dass aus einer n-elementigen Menge nur auf eine Weise 0 Elemente entnommen werden können, nämlich, indem man keines entnimmt. Analoges gilt für das Entnehmen einer n-elementigen Teilmenge und kann auch aus Proposition 1 abgeleitet werden.

Die k-elementigen Teilmengen von $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ können auf zwei verschiedene Arten unterschieden werden: diejenigen, die n enthalten und diejenigen, die n nicht enthalten. Das heißt, es müssen die Kardinalitäten der beiden Teilmengen addiert werden, um auf die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen von $[n]$ zu kommen. Wenn n in der k-elementigen Menge ist, müssen wir $k-1$ weitere Elemente aus $[n-1]$ wählen (da n bereits in der Menge enthalten ist). Dafür gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten. Für den Fall, dass n nicht in der k-elementigen Menge enthalten ist, müssen noch k Elemente aus $n-1$ gewählt werden, dies sind $\binom{n-1}{k}$ Elemente.

Insgesamt gilt also $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. □

Die Binomialkoeffizienten haben aber noch eine größere Bedeutung, die mit den Erzeugendenfunktionen (siehe Kapitel 5) in Verbindung steht. Die Reihe, durch die sie erzeugt werden, ist $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, die einen Weg bietet, die Potenz einer Summe zweier Zahlen (oder sogar Polynome) x, y zu bestimmen und die wir uns an diesem Punkt zuwenden wollen.

Satz 3 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für alle natürlichen Zahlen n, sowie $x, y \in \mathbb{C}[x]$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Siehe [10, S. 6]. □

Für $n = 2$ erhält man auf diese Weise die erste binomische Formel:

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k y^{2-k} = x^0 y^2 + 2x^1 y^1 + x^2 y^0 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Es gibt noch viele weitere Aussagen und Gleichungen, die mit Binomialkoeffizienten arbeiten. Da dieser Abschnitt aber das Verständnis der Euler-Zahlen erleichtern soll, reichen die hier getätigten Aussagen aus.

2.2 Definition der Euler-Zahlen und der Euler-Polynome

Die kombinatorische Definition der Euler-Zahlen ist über die **symmetrische Gruppe** S_n gegeben. An dieser Stelle sei betont, dass es nicht die einzige Möglichkeit ist, eine Definition anzugeben. Wie schon in der Einleitung beschrieben,handelt es sich dabei auch nicht um die von Euler gegebene Definition. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist S_n die Gruppe, die alle Permutationen von $[n]$ enthält. Der Übersichtlichkeit halber wird in dieser Arbeit die Tupelschreibweise verwendet — also $\omega = \omega(1)\omega(2)\cdots\omega(n)$ für ein $\omega \in S_n$. Ein Element der Gruppe S_8 ist beispielsweise $\omega = 47128365$. Es folgen einige kurze Definitionen, die benötigt werden, um die Euler-Zahlen — die Anzahl an Permutationen, die bei einer n-elementigen Menge exakt k Abstiege enthalten – definieren zu können. Dies folgt [17, S. 6]. Die **Abstiege** (im Englischen mit „descents" bezeichnet) einer Permutation $\omega \in S_n$ sind alle Positionen $i \in [n-1]$, für die $\omega(i) > \omega(i+1)$ gilt. Dies sind maximal $n-1$ Positionen, da es an der letzten Stelle der Permutation keinen Abstieg mehr geben kann. Die Menge der Abstiege in einer Permutation ω bezeichnen wir mit $\mathrm{Des}(\omega)$:

$$\mathrm{Des}(\omega) = \{i \in [n-1] : \omega(i) > \omega(i+1)\}.$$

Die Kardinalität der Menge $\mathrm{Des}(\omega)$ wird mit $\mathrm{des}(\omega)$ bezeichnet:

$$\mathrm{des}(\omega) = |\,\mathrm{Des}(\omega)\,| = |\,\{i \in [n-1] : \omega(i) > \omega(i+1)\}\,|.$$

Das gerade genannte Beispiel $\omega = 47128365$ hat Abstiege in Position 2 (da $7 > 1$), Position 5 (da $8 > 3$) und Position 7 (da $6 > 5$). Daher gilt $\mathrm{Des}(\omega) = \{2,5,7\}$ und somit folgt $\mathrm{des}(\omega) = 3$. Nach diesen Definitionen wollen wir die **Euler-Zahlen** $A_{n,k}$ definieren.

Definition 4. Für positive ganze Zahlen n und k, mit $n > k$, ist die Euler-Zahl wie folgt definiert:

$$A_{n,k} = |\,\{\omega \in S_n : \mathrm{des}(\omega) = k\}\,|.$$

Tabelle 2 stellt die Euler-Zahlen für $0 \le k < n \le 10$ dar. Das Beispiel $\omega = 47128365$ mit $\mathrm{des}(\omega) = 3$ ist also ein Element der Menge $\{\omega \in S_8 : \mathrm{des}(\omega) = 3\}$, deren Kardinalität $A_{8,3}$ entspricht, da die Permutation zur Symmetriegruppe S_8 gehört und drei Abstiege beinhaltet.

Tabelle 2: Euler-Zahlen $A_{n,k}$ für $0 \le k < n \le 10$.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n!$
1	1	0									1
2	1	1	0								2
3	1	4	1	0							6
4	1	11	11	1	0						24
5	1	26	66	26	1	0					120
6	1	57	302	302	57	1	0				720
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0			5040
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0		40320
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0	362880
10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1	3628800

Die **Euler-Polynome** $A_n(t)$ sind wie folgt definiert [17, S. 9]:

Definition 5. Für $n \geq 0$:

$$A_0(t) = 1 \quad \textit{und} \quad A_n(t) = \sum_{\omega \in S_n} t^{\mathrm{des}(\omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} t^k.$$

Beispiel. *Sein $n = 4$ gegeben, dann lautet das Polynom:*

$$A_4(t) = \sum_{k=0}^{3} A_{4,k} t^k = A_{4,3} t^0 + A_{4,1} t^1 + A_{4,2} t^2 + A_{4,3} t^3 = 1 + 11 + 11t^2 + t^3.$$

Wir werden diesen Polynomen in dieser Arbeit später wiederholt begegnen, wenn wir uns deren Ursprünge anschauen (Kapitel 2.4), sie mit der Carlitz-Identität in Verbindung bringen (Kapitel 4.1) und wenn wir sie in Kontext mit Erzeugendenfunktionen bringen (Kapitel 5).

2.3 Gleichungen mit Euler-Zahlen

Nun wollen wir die Euler-Zahlen jedoch begreifbarer machen, indem wir sie in einigen Gleichungen ansehen. Zum einen funktionieren die Euler-Zahlen als Sortierung der symmetrischen Gruppe S_n, und als zweites soll eine Erläuterung geben werden, dass die Definition der Euler-Zahlen über Anstiege eine äquivalente Darstellung ist und dabei auf einfachem Weg aus der Definition über Abstiege herzuleiten ist. Als letztes wollen wir uns $A_{p,k} \bmod (p+1)$ zuwenden, wenn $(p+1)$ eine Primzahl ist.

Die Summe der Euler-Zahlen $A_{n,k}$ von $k = 0$ bis $k = n-1$ ist die Fakultät von n. Dies ist die Summe der einzelnen Werte der n-ten Zeile des Euler-Dreiecks — in Tabelle 2 sind die Werte in der letzten Spalte ablesbar.

Proposition 6. *Es gilt $\sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} = n!$ für alle $n > 0$.*

Beweis. Da die Mengen hinter den Euler-Zahlen (zu einem festen n) paarweise disjunkt sind wird auf diese Weise jede Permutation der Gruppe S_n genau einmal gezählt:

$$\biguplus_{I \in [n-1]} \{\omega \in S_n : \mathrm{des}(\omega) = I\} = S_n \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} = n!.$$

Somit ist unsere Aussage bewiesen. □

Beispiel. *Sei $n = 4$ gegeben. Dann muss man vier Euler-Zahlen addieren.*
$4! = \sum_{k=0}^{3} A_{4,k} = A_{4,0} + A_{4,1} + A_{4,2} + A_{4,3} = 1 + 11 + 11 + 1 = 24.$

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Euler-Zahlen anhand der Abstiege in den Permutationen definiert. Man kann auf analoge Weise die Anstiege definieren und erhält eine gleichwertige Definition der Euler-Zahlen.

Definition 7. [Aufstiege] Für die Aufstiege einer Permutation $\omega \in S_n$ gilt:

$$\mathrm{asc}(\omega) := |\{i \in [n-1] : \omega(i) < \omega(i+1)\}|.$$

Die Definition unterscheidet sich von der der Abstiege nur in der Hinsicht, dass wir $>$ in die andere Richtung gedreht haben. Die Euler-Zahlen haben keine einheitliche Definition, weshalb es noch weitere, leicht abgewandelte Definitionen (wie, dass $A_{n,k}$ die Permutationen mit $k-1$ Abstiegen beschreibt) gibt. Wir wollen uns nun dem Zusammenhang zwischen Aufstiegen und Abstiegen zuwenden.

Proposition 8. Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n-1$ gilt: $\operatorname{des}(\omega) + \operatorname{asc}(\omega) = n-1$. Daher folgt, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{asc}(\omega) &= |[n-1]| - |\operatorname{Des}(\omega)| \\ &= n - 1 - \operatorname{des}(\omega). \end{aligned}$$

Beweis. Die Anzahl k der Abstiege wird dabei von $n-1$ und nicht von n abgezogen. Dies liegt daran, dass es maximal $n-1$ Positionen gibt, die Abstieg oder Anstieg sein können. Jedes Paar $(\omega(i)\omega(i+1))$ für $i \leq n-1$ ist also ein Anstieg oder ein Abstieg. Wenn wir genau k Abstiege haben, müssen die restlichen $1 \leq n-1-k$ Paare also Anstiege sein. □

Daraus können wir folgendes Korollar ableiten, bei dem es sich um eine symmetrische Eigenschaft der Euler-Zahlen handelt und die eine Ähnlichkeit mit (1) aufweist.

Korollar 9. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n-1$ gilt: $A_{n,k} = A_{n,n-1-k}$.*

Beweis. Bei $A_{n,k}$ haben wir k Abstiege, somit also $(n-1)-k$ Anstiege und bei $A_{n,n-k-1}$ sind es $n-1-k$ Abstiege, beziehungsweise k Anstiege. Mit Proposition 8 folgt die Gleichheit. □

Beispiel. *Sei $n = 6$ gegeben, dann gilt:*

$$A_{6,0} = 1 = A_{6,6-1-0}, \; A_{6,1} = 57 = A_{6,6-1-1}, \; \textit{und} \; A_{6,2} = 302 = A_{6,6-1-2}.$$

Mit Korollar (9) erkennen wir nun auch, warum — ähnlich dem Pascalschen Dreieck — eine Symmetrie im Euler-Dreieck herrscht. Daher sind die Euler-Zahlen für $A_{6,k}$ in Tabelle 3 aufgelistet, um die Symmetrie daran aufzuzeigen.

Tabelle 3: Euler-Zahlen $A_{6,k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 6$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
6	1	57	302	302	57	1	0

Satz 10. *Sei $(p+1)$ eine Primzahl. Dann ist $A_{p,k} \bmod (p+1) = 1$.*

Der Beweis wird nach Abschnitt 3.2 erfolgen, da wir die rekursive Definition der Euler-Zahlen für den Beweis benötigen. Hier sollen aber zwei Beispiele gegeben werden.

Beispiel. *Sei $p+1 = 5$:*
Dann gilt: $A_{4,k} \bmod 5 = 1$, da wir $A_{4,0} = A_{4,3} = 1 \bmod 5 = 1$ und $A_{4,1} = A_{4,2} = 11 \bmod 5 = 1$ haben.
Sei $p+1 = 7$:
Dann gilt: $A_{6,k} \bmod 7 = 1$, da wir $A_{7,0} = A_{7,6} = 1 \bmod 7 = 1$, $A_{7,1} = A_{7,4} = 57 \bmod 7 = 1$ und $A_{7,2} = A_{7,3} = 302 \bmod 7 = 1$ haben.

2.4 Ein kurzer geschichtlicher Überblick

Die Euler-Polynome tauchen erstmals in Eulers 1755 erschienenen Werk „Institutiones Calculi differentialis" in Kapitel 7 [7] ([E212][1]) und seinem Aufsatz [8] ([E352] nach Enström-Index) auf „Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques", wobei man den genauen Weg der Euler-Zahlen und -Polynome nur schwer nachverfolgen kann. Der Ursprung der Euler-Polynome findet sich in der später nach Riemann benannten ζ-Funktion, die Euler für negative Werte auswerten wollte sowie der η-Funktion, die er mit $A(m) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} i^m$ in Verbindung gebracht hat [8, S. 2]. Erst

[1]Die Nummerierung folgt den „Eneström numbers", die von Gustav Eneström entwickelt wurden, um die wichtigsten Werke Eulers schneller zuordnen zu können.

durch die dafür entwickelten Euler-Polynome sind die Euler-Zahlen (nach seiner Definition) überhaupt entstanden.

Zuerst soll die ζ-Funktion beschrieben werden, für die Havil [12, S. 49, 55] und Hirzebruch [13] einen guten Einblick bieten. Eine Betrachtung der Funktion erfolgt im Regelfall im Komplexen, wobei sie, wie Euler es getan hat auch nur im Reellen analysiert werden kann.

Definition 11. [ζ-Funktion] Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 1$ gilt:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots .$$

Die Reihe konvergiert für $Re(s) > 1$ absolut und divergiert, falls $Re(s) \leq 1$ (für $s \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe, wenn $s > 1$). Dabei handelt es sich, wie oben gesagt, um die Riemann-ζ-Funktion, da die ζ-Funktionen eine ganze Familie an verschiedenen Funktionen bilden. Ein Spezialfall der Riemann-ζ-Funktion ist das „Basler-Problem" [12, S. 50], bei dem es das Ziel war den Wert von $\zeta(2)$ zu berechnen: Viele Mathematiker haben es versucht, sind jedoch nicht erfolgreich gewesen. Euler gelang es um das Jahr 1731 ganze sechs Dezimalstellen zu berechnen, und 1735 kam er dann auf den genauen Wert $\frac{\pi^2}{6}$. Die alternierende Version der Reihe ist dabei sogar auf $(0, \infty)$ definiert und wird als η-Funktion bezeichnet.

Definition 12. [η-Funktion] Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 0$, gilt:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

Die ζ- und η-Funktion stehen im Zusammenhang miteinander, wie der folgende Satz erkennen lässt.

Satz 13. *Für die ζ-Funktion und η-Funktion gilt, dass*

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$

Beweis. Die Gleichheit wollen wir mit einem kleinen Trick beweisen:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) - \eta(s) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right) - \left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right) \\
&\overset{(1)}{=} 2\frac{1}{2^s} + 2\frac{1}{4^s} + 2\frac{1}{6^s} + 2\frac{1}{8^s} + \cdots \\
&\overset{(2)}{=} \frac{2^1}{2^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 2^{1-s}\zeta(s).
\end{aligned}$$

Es gilt (1), da bei der η-Funktion die Vorzeichen alternieren — dadurch bleiben nur die Brüche mit gerader Zahl im Nenner übrig, und das jeweils zwei mal, da wir diese addieren. Die zweite Gleichheit gilt, da wir lediglich das $\frac{2^1}{2^s}$ aus den einzelnen Summanden raus ziehen, wodurch wir $\frac{2^1}{2^s}$ mit der ζ-Funktion multiplizieren.

Nun wissen wir, dass $\zeta(s) - \eta(s) = 2^{1-s}\zeta(s)$ entspricht, müssen aber noch ein paar kleine Umformungen vornehmen, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten.

$$\begin{aligned}
\zeta(s) - \eta(s) = 2^{1-s}\zeta(s) \quad &\iff \quad \zeta(s) = 2^{1-s}\zeta(s) + \eta(s) \\
&\iff \quad \zeta(s) - 2^{1-s}\zeta(s) = \eta(s) \\
&\iff \quad \zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = \eta(s)
\end{aligned}$$

Somit ist der Satz bewiesen. □

Die ζ- und η-Funktion haben aber einen Nachteil: Sie sind, wie wir gesehen haben, nicht für einen negativen Realanteil definiert. Dafür gibt es aber jeweils eine analytische Fortsetzung, die im ursprünglichen Definitionsbereich jeweils mit der Funktion übereinstimmt, aber auch für negative Realanteile definiert ist. Die analytische Fortsetzung der ζ-Funktion ist:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s). \tag{2}$$

Für die η-Funktion gelangen wir zu der folgenden Fortsetzung:

$$(2^{s-1}-1)\eta(1-s) = -(2^s-1)\pi^{-s}\Gamma(s)\eta(s).$$

Beide sind entnommen aus [16, S. 24] (Osler und Willis haben eine gute Übersetzung von Eulers Aufsatz E352 mit Anmerkungen ins Englische erbracht). Für die ζ-Funktion existieren unendlich viele Nullstellen, die sogenannten **trivialen Nullstellen** und die Nullstellen im kritischen Streifen. Die trivialen Nullstellen befinden sich bei $\zeta(-2k)$, wobei $k = 1,2,\ldots$ ist. Der Grund dafür lässt sich in $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ in (2) erkennen. Um in der Gleichung $\zeta(-2k)$ zu erhalten muss s eine ungerade Zahl sein, demnach die Form $s = 2k+1$ besitzen. Fügen wir dies in die Gleichung ein haben wir $\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)$. Durch kürzen erhalten wir: $\cos((k+0,5)\pi)$ — dies sind genau die Nullstellen von $\cos(x)$. Das Produkt auf der rechten Seite entspricht demnach 0, wenn $\cos(x) = 0$ ist. Für die Nullstellen im kritischen Streifen hat Riemann eine Vermutung aufgestellt, die bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden konnte [6, S. 189].

Vermutung 14 (Riemannsche Vermutung)**.** *Wenn s eine Nullstelle der ζ-Funktion im kritischen Streifen $0 \le Re(s) \le 1$ ist, dann gilt $Re(s) = \frac{1}{2}$.*

Kommen wir nun zudem für uns interessanteren Teil — der Bezug zu den Euler-Zahlen und -Polynomen. In [8] möchte Euler zeigen, dass die Reihe $A(m) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}i^m$ mit der $\eta(s)$-Funktion in Verbindung steht, und dass $A(1) = 1/4$ ist, was an sich unmöglich erscheint, da die Reihe divergiert. Für ihn ist wichtig, dass die Reihe als Zahlenwert verstanden werden kann [8, §2]. Für dieses Vorhaben stellt er $A(1)$ mit $\frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$ in Verbindung und nutzt dabei die **Abel-Summe**, die wie folgt definiert ist [18, S. 4].

Definition 15. [Abel-Summe] Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent im Sinne der Abel-Summe, wenn $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $|x| < 1$ konvergiert. Wir schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{A}{=} f(1).$$

Beispiel. *Nehmen wir uns die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$, die für $|z| < 1$ konvergiert. Für $z = 1$ gilt demnach, dass*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 1^n = 1-1+1-1+1-1+1-\cdots \overset{A}{=} \frac{1}{2} = f(1).$$

Euler hat als erste Summe

$$P_0(x) = \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

gesetzt und dann die weiteren Summen durch

$$P_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot P_i(x)) = P_i(x) + xP_i'(x)$$

rekursiv definiert [8, §3], was zu den folgenden Summen führt:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots \\
P_2(x) &= \frac{1-x}{(1+x)^3} = 1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \cdots \\
P_3(x) &= \frac{1-4x+x^2}{(1+x)^4} = 1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + 5^3x^4 - \cdots \\
P_4(x) &= \frac{1-11x+11x^2-x^3}{(1+x)^5} = 1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + 5^4x^4 - \cdots .
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Form von $P_i(x)$ ist demnach

$$
P_i(x) = \frac{A_i(-x)}{(1+x)^{i+1}}. \tag{3}
$$

Das Polynom $A_i(-x)$ im Nenner erhalten wir durch die Definition der Euler-Polynome. Normalerweise addieren wir alle Koeffizienten, aber dadurch, dass wir $A_i(-x)$ betrachten, haben wir ein alternierendes Polynom. In Kapitel 4.1 wird darauf nochmals eingegangen. Es gilt für $x = 1$ dass $P_1(1) = 1/4$, was Euler zeigen wollte, sowie $P_0(1) = 1/2$, $P_2(1) = 0$, $P_3(1) = -2/16$ und $P_4(1) = 0$. Nach [18, S. 5] gilt:

Satz 16. *Sei $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}$ analytisch fortgesetzt auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Dann gilt:*

$$
\zeta(-n) = \frac{A_n(-1)}{2^{n+1} - 4^{n+1}} \quad (n \geq 0).
$$

Beweis. Mit Hilfe der Abel-Summe können wir den Satz beweisen. Euler hat gezeigt, dass die η-Funktion im Sinne der Abel-Summe aufsummierbar ist, und wir wissen durch Satz 13, dass Eigenschaften der η-Funktion auf die ζ-Funktion übertragen werden können. Dafür benötigen wir noch den Euler-Operator $x\frac{d}{dx}$ der durch ε gegeben ist und

$$
\varepsilon^n \frac{1}{1+x} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (-x)^{j+1} A_{n,j}\, j^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}
$$

erfüllt [18, S. 2]. Es gilt, mit $g(x) = 1/1+x$, dass

$$
\begin{aligned}
\eta(-n) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m^n \overset{A}{=} -\varepsilon^n g(1) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+2} A_{n,j}}{(1+1)^{n+1}}, \\
\zeta(-n) &= \frac{\eta(-n)}{(1-2^{n+1})} \overset{A}{=} \frac{-\varepsilon^n g(1)}{(1-2^{n+1})} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+2} A_{n,j}}{(1-2^{n+1})(1+1)^{n+1}} = \frac{A_n(-1)}{2^{n+1} - 4^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Somit ist bewiesen, dass $\zeta(-n) = \frac{A_n(-1)}{2^{n+1}-4^{n+1}}$ für $n \geq 0$ gilt. □

Beispiel. *An dieser Stelle sollen die ersten Werte für $\zeta(-n)$ dargestellt werden:*

$$
\begin{aligned}
\zeta(-1) &= \frac{A_1(-1)}{2^{1+1} - 4^{1+1}} = -\frac{1}{12} \\
\zeta(-2) &= \frac{A_2(-1)}{2^{2+1} - 4^{2+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{2-1} A_{2,k}(-1)^k}{-56} = 0 \\
\zeta(-3) &= \frac{A_3(-1)}{2^{3+1} - 4^{3+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{3-1} A_{3,k}(-1)^k}{-240} = \frac{1}{120}.
\end{aligned}
$$

3 Rekursionen

In diesem Kapitel werden jeweils zwei Rekursionen zu den Euler-Zahlen und zu den Euler-Polynomen behandelt.

3.1 Lineare Rekursion der Euler-Zahlen

Es erscheint schwierig und aufwendig, sich alle Permutationen der Gruppe S_n anzuschauen und durchzugehen, welche exakt k Abstiege besitzen. Aus diesem Grund soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, die Euler-Zahlen auf rekursive Weise zu berechnen. Dabei gibt es eine Besonderheit — es werden nicht nur $A_{n-1,k-1}$ und $A_{n-1,k}$ addiert, wie es bei den Binomialkoeffizienten der Fall ist (siehe 1), sondern sie werden in unterschiedlicher Gewichtung addiert. Je nachdem, an welcher Stelle der Permutation $\omega \in S_n$ die Zahl eingefügt wird, können unterschiedlich viele weitere Abstiege entstehen.

Proposition 17. [Lineare Rekursion] Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n und k mit $k \leq n$ gilt:

$$A_{0,0} = 1, \quad A_{n,0} = 1, \quad A_{n,n} = 0 \quad \textit{sowie}$$

$$A_{n,k} = (n-k)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k}. \tag{4}$$

Beweis. Die ersten drei Aussagen gelten aufgrund der folgenden Argumentation: In der Menge der Permutation der Länge null gibt es genau eine Permutation, die keine Abstiege hat und bei denen der Länge n gibt es ebenfalls genau eine Permutation, die keinen Abstieg enthält, nämlich $\omega = 12\cdots n$. Es kann in einer Permutation der Länge n keine n Abstiege geben, da dafür die n-te Stelle ebenfalls ein Abstieg sein müsste.

Zur Rekursion: Seien $k,n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n-1$. Jedes $\hat{\omega} \in S_n$ entsteht aus einer (und nur einer) Permutation $\omega \in S_{n-1}$, indem man an einer der n Möglichen Stellen den Wert n einfügt. Dies sei nun $(\cdots \omega(i) n \omega(i+1) \cdots)$, wobei $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Nun können zwei Fälle auftreten:

Fall 1: Bei $(\cdots \omega(i)\omega(i+1)\cdots)$ gab es einen Anstieg, dann erhöht sich diese Anzahl der Abstiege um eins.

Fall 2: War $(\cdots \omega(i)\omega(i+1)\cdots)$ ein Abstieg, bleibt die Anzahl der Abstiege unverändert.

Es gilt also, dass, wenn ω genau k-Abstiege gehabt hat, es $k+1$ mögliche Positionen gibt, um n einzufügen, ohne dass sich die Anzahl der Abstiege verändert. Das $+1$ kommt daher, dass nach $\omega(n-1)$ der Wert n eingefügt werden kann, was nicht zu einem Abstieg führt. Wenn $\omega \in S_{n-1}$ aber nur $k-1$ Abstiege gehabt hat, dann gibt es $n-k-1+1 = n-k$ Positionen, um n einzufügen, sodass $\hat{\omega} \in S_n$ insgesamt k Abstiege besitzt. $\square$

Im Anhang befindet sich eine Abbildung, aus der man die Gewichtung der rekursiven Definition einfacher ablesen kann (siehe Abbildung 1). Gewichtet bedeutet dabei, dass man erkennt, mit welchem Faktor wir $A_{n-1,k-1}$ und $A_{n-1,k}$ multiplizieren müssen.

3.2 Alternierende Summenformel

Da es wie so oft nicht nur einen Weg gibt, der uns ans Ziel bringt, wollen wir uns einer weiteren Methode der rekursiven Berechnung der Euler-Zahlen zuwenden, wobei dieser Weg für große k relativ aufwendig ist. Der Vorteil ist, dass wir die vorherigen Euler-Zahlen nicht kennen müssen. In "Concrete Mathmatics" [11, S. 269] haben die Autoren diese Möglichkeit beschrieben. Die Berechnung erfolgt als alternierende Summe über Binomialkoeffizienten.

Satz 18. *Für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gilt:*

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} (-1)^i (k+1-i)^n. \tag{5}$$

Beweis. Der Beweis folgt Bóna [2, S. 8], der den Satz mithilfe des Inklusions-Exklusions-Prinzips bewiesen hat. Wir setzten k *Trennwände*, sodass $k+1$ *Abteile* entstehen. Dies geschieht, bevor wir irgendeine Zahl niedergeschrieben haben. Dabei ist jeder Zwischenraum zwischen zwei Trennwänden ein Abteil, ebenso der Platz vor der ersten Trennwand und der Platz nach der letzten Trennwand. Nun fügen wir jedes unserer $[n]$ Elemente in eines der Abteile, dabei können die Abteile mehrfach besetzt sein oder gar keine Zahl enthalten. Für diesen Schritt haben wir $(k+1)^n$ Möglichkeiten, da jedes Element von $[n]$ an jeden der $k+1$ Plätze gesetzt werden kann. Dies entspricht in der Gleichung (5) dem Wert von $i=0$.

Als nächstes betrachten wir die einzelnen Abteile und ordnen die dort stehenden Zahlen aufsteigend an. Es kann demnach höchstens k Abstiege geben, da nur bei den Zahlen direkt vor einer Trennwand ein Abstieg vorkommen kann.

Was für Probleme können nun auftreten? Zum einen kann es sein, dass wir leere Abteile haben (dass zwei Trennwände direkt hintereinander stehen, da keine Ziffer in das Abteil dazwischen eingefügt wurde) und es kann vorkommen, dass wir eine Trennwand haben, die gar keinen Abstieg markiert. Diese müssen wir jeweils von allen Möglichkeiten abziehen (wie Ziffern und Trennwände geordnet sein können), um die Permutationen zu erhalten, die genau k Abstiege haben, welche wir dann gültige Anordnung nennen.

Mit *Balken* bezeichnen wir nun diejenigen Trennwände, denen keine weitere Trennwand direkt folgt, und *irrelevante Trennwände* sind diejenigen, bei welchen wir durch ihr Entfernen immer noch eine zulässige Permutation erhalten. Wir wollen nun also keine Permutation haben in der es eine irrelevante Trennwand gibt, da es ansonsten weniger als k Abstiege wären.

Eine *Position* sei jeder mögliche Platz, an den wir die Zahlen von $[n]$ setzen können, es gibt $n+1$ Positionen, bei einer Permutation der Länge n. Des Weiteren sei $S \subseteq [n+1]$ und A_S sei die Menge aller Permutationen, die an jeder Position von S eine irrelevante Trennwand besitzen. Die Kardinalität der Menge S sei durch $i \leq k$ gegeben und wir behaupten, dass $|A_S| = (k+1-i)^n$ sei.

Dass dies stimmt soll die folgende Begründung zeigen: Wir schauen uns dafür alle gültigen Anordnungen an, die $k-i$ Trennwände haben, insgesamt sind dies $(k+1-i)^n$ Anordnungen. Nun werden i weitere Trennwände eingefügt und zwar an jeder Position von S, was unsere Anordnung zu einem Element von $|A_S|$ macht. Dabei wird jedes Element von $|A_S|$ genau einmal erstellt.

Insgesamt gibt es $\binom{n+1}{i}$ Möglichkeiten für die Menge S und $A_\varnothing$ ist die Menge von Anordnungen mit k Trennwänden, die keine irrelevanten Trennwände enthält. □

Auch Petersen [17] hat einen Beweis zu Satz 5 geschrieben. Er hat sich die Worpitzky-Identität (Satz (23)) zur Hilfe genommen und die Identität umgeformt. An dieser Stelle soll diese Beweisidee etwas skizziert werden (auch Petersen selbst hat keinen kompletten Beweis geschrieben). Schauen wir uns hierfür die ersten Werte für $A_{n,k}$ an, die wir durch $x=0$ und $x=1$ erhalten:

$$(0+1)^n = A_{n,0}\binom{0+n}{n} + \underbrace{A_{n,1}\binom{0+n-1}{n} + \cdots}_{=0,\ da\ (n-1)<n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_{n,0} = 1$$

$$(1+1)^n = A_{n,0}\binom{1+n}{n} + A_{n,1}\binom{1+n-1}{n} + \underbrace{A_{n,2}\binom{1+n-2}{n} + \cdots}_{=0,\ da\ (n-1)<n}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad A_{n,1} = 2^n - A_{n,0}\binom{1+n}{n} = 2^n - (n+1).$$

Auf dieser Weise können wir immer weiter fortfahren und erkennen außerdem, dass wir immer nur bis zu dem x addieren, da der Rest aufgrund der Binomialkoeffizienten immer 0 ergeben wird. Dies erkennt man gut an den ersten beiden Beispielen, für das nächste wollen wir es daher nicht mehr aufschreiben.

$$
\begin{aligned}
&& (2+1)^n &= A_{n,0}\binom{2+n}{n} + A_{n,1}\binom{2+n-1}{n} + A_{n,2}\binom{2+n-2}{n} \\
\iff && A_{n,2} &= 3^n - A_{n,1}\binom{1+n}{n} - \binom{2+n}{n} \\
&& &= 3^n - 2^n(n+1) + (n+1)^2 - \binom{2+n}{n} \\
&& &= 3^n - 2^n(n+1) + \binom{n+1}{n-1}
\end{aligned}
$$

Verallgemeinern wir dies nun, genauso wie Petersen es getan hat, können wir die folgende Form angeben:

$$
\begin{aligned}
A_{n,k} &= (k+1)^n - k^n\binom{n+1}{n} + (k-1)^n\binom{n+1}{n-1} - \cdots + (-1)^k\binom{n+1}{n+1-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k}(k+1-i)^n\binom{n+1}{i}(-1)^i.
\end{aligned}
$$

Beweis zu Satz (10). Der Beweis kommt erst an dieser Stelle, da wir uns die gerade gezeigte rekursive Eigenschaft zunutze machen wollen. Da wir $A_{p,k} \mod (p+1)$ berechnen wollen, können wir auch

$$
\sum_{i=0}^{k}\binom{p+1}{i}(-1)^i(k+1-i)^p \mod (p+1)
$$

betrachten. Um uns den Beweis anschaulicher zu machen, wollen wir den ersten Term der Summe abspalten:

$$
A_{p,k} = (k+1)^p + \sum_{i=1}^{k}\binom{p+1}{i}(-1)^i(k+1-i)^p.
$$

Es gilt $(k+1)^p \bmod (p+1) = 1$, aufgrund des kleinen Satzes von Fermat [15, S. 233]. Dieser besagt, dass $a^{\varphi(p+1)} \equiv 1 \bmod (p+1)$, wenn $(p+1)$ eine Primzahl ist. Da $(p+1)$ eine Primzahl ist hat sie nur sich selbst und die 1 als Teiler und somit p teilerfemde Zahlen in $\{0,\dots,p\}$ — dies entspricht $\varphi(p+1)$.

Für den zweiten Summanden der Summe gilt $\binom{p+1}{k} \mod (p+1) = 0$ aufgrund von:

$$
\binom{p+1}{k} = \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} \quad\iff\quad k!\binom{p+1}{k} = (p+1)p(p-1)\cdots(p+2-k)
$$

Da $(p+1)$ als Faktor auf der rechten Seite der Gleichung vorkommt, muss es auch auf der linken Seite vorkommen. Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist es nicht in $k!$ enthalten, wodurch er in $\binom{p+1}{k}$ enthalten sein muss. Somit ist $\binom{p+1}{k}$ ein Vielfaches von $(p+1)$ und damit $\sum_{i=1}^{k}\binom{p+1}{i}(-1)^i(k+1-i)^p \mod (p+1) = 0$, da $\binom{p+1}{i}(-1)^i(k+1-i)^p$ für alle i und k auch ein Vielfaches von $(p+1)$ ist.

Damit bleibt nur $(k+1)^p \equiv 1 \mod (p+1)$, womit der Satz bewiesen ist. □

3.3 Lineare Rekursion der Euler-Polynome

Da es sehr aufwendig ist, alle Summanden auszurechnen liegt es doch nahe, dass es doch auch eine einfachere und schnellere Möglichkeit gibt. Hier kommen wir erneut zur Rekursion, und wie sollte es anders sein: sie ist uns nur dann von Vorteil, wenn wir das vorherige Polynom bereits kennen. In diesem Fall benötigen wir tatsächlich nur das direkt vorherige Polynom, dafür aber auch dessen Ableitung.

Satz 19. *Für alle $n \geq 0$ gilt:* $A_{n+1}(t) = (1+nt)A_n(t) + t(1-t)A'_n(t)$.

Beweis. Die Rekursion gilt aufgrund der folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(t) &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n} A_{n+1,k}t^k \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n} [(n+1-k)A_{n,k-1} + (k+1)A_{n,k}]\, t^k \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k}t^k + n\sum_{k=1}^{n} A_{n,k-1}t^k + \sum_{k=1}^{n-1} kA_{n,k}t^k - \sum_{k=2}^{n-1}(k-1)A_{n,k-1}t^k \\
&\overset{(4)}{=} (1+nt)\sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k}t^k + (t-t^2)\sum_{k=1}^{n-1} kA_{n,k}t^{k-1} \\
&\overset{(5)}{=} (1+nt)A_n(t) + (t-t^2)A'_n(t).
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile entspricht nun unserem Satz über die Rekursion der Euler-Polynome, wobei wir statt n den Wert $n+1$ haben, was dem $(n+1)$-ten Polynom entspricht und somit den Satz beweist. □

Bei (1) wird die Definition 5 genutzt, wobei n an dieser Stelle $n+1$ wird. Bei (2) nutzen wir die lineare Rekursion der Euler-Zahlen (4). Bei (3) spalten wir die Summen auf und fassen sie bei (4) neu zusammen. In Schritt (5) nutzen wir erneut unsere Definition 5 um die Summe als Euler-Polynom darzustellen.

3.4 Rekursion über die Summenformel

Wie bei den Euler-Zahlen wollen wir auf eine weitere Möglichkeit der Rekursion eingehen, die uns die Euler-Polynome berechnen lässt. Bei dieser Gleichung wird aber schnell ersichtlich, dass es einiger Arbeit bedarf, um ein bestimmtes Polynom $A_n(t)$ zu bestimmen, da wir alle vorherigen Polynome kennen oder berechnen müssen. Aufgrund dessen ist es im Allgemeinen sinnvoller, die lineare Rekursion zu nutzen, wenn wir das vorherige Polynom kennen. Es folgt nach [9, S. 7].

Satz 20. *Für alle t und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k(t)(t-1)^{n-1-k} \quad (n \geq 1).$$

Der Beweis ist relativ lang und kann daher als Ganzes in Foata [9, S. 3, 6] nachgelesen werden. Foata konstruiert in dem Paper Eulers Schritte, die er in [7, Volume 2, Kapitel 7] getätigt hat.

4 Identitäten und Asymptotik

4.1 Carlitz-Identität

Satz 21 (Carlitz-Identität)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n t^k.$$

Beweis. Für den Beweis (nach [17, S. 10]) wollen wir uns das Polynom

$$a_n(t) = (1-t)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n t^k$$

definieren, für welches wir die Gleichheit mit Satz 19 zeigen wollen. Es gilt

$$a_0(t) = (1-t)^1 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^0 t^k = 1 \qquad \textit{und}$$
$$a_{n+1}(t) = (1+nt)a_n(t) + t(1-t)a_n'(t).$$

Daher gilt das $a_n = A_n$ ist und wir können schreiben:

$$A_n(t) = (1-t)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n t^k$$
$$\iff \quad \frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n t^k.$$

Unser Satz ist damit bewiesen. □

An dieser Stelle wollen wir nochmal auf die Ziele Eulers (Abschnitt 2.4) zurückblicken und 3 mit der Carlitz-Identität vergleichen

$$P_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}(x * P_i(x)) = P_i(x) + xP_i'(x) = \frac{A_n(-x)}{(1+x)^{n+1}}$$

Wir sehen nun dass wir bei der Carlitz-Identität als Nenner $(1-t)^{n+1}$ haben, dafür aber die Euler-Polynome $A_n(t)$ im Zähler haben, während wir bei 3 die Polynome von $(-x)$ betrachten, aber $(1+x)^{n+1}$ als Nenner haben. Auf diese Weise erhalten wir bei der Carlitz-Identität ein Polynom, dass nur positive $k+1$ addiert, während wir bei Euler alternierende Vorzeichen haben. Dies zeigt auch dass es sich bei 3 tatsächlich um die Euler-Polynome im Zähler handelt.

4.2 Worpitzky-Identität

Die Euler-Zahlen bieten ebenfalls eine Möglichkeit, die Potenz $(x+1)^n$ darzustellen. Der hier gegebene Satz der Worpitzky-Identität und der Beweis sind aus [17, S. 6, 10] entnommen. Bevor wir aber zu dem eigentlichen Satz kommen, wollen wir noch ein kleines Lemma vorwegstellen, welches wir im Beweis der Worpitzky-Identität nutzen werden.

Lemma 22. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt* $\frac{t^i}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-i}{n} t^k$.

Beweis. Wenn wir die geometrische Reihe $\sum_{t=0}^{\infty} k^t = \frac{1}{1-t}$ insgesamt n-mal nach der Variablen t ableiten, erhalten wir:

$$\frac{n!}{(1-t)^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)t^{k-n}.$$

Wenn wir die erhaltene Gleichung nun durch $n!$ teilen, erhalten wir eine weitere Erzeugendenfunktionen für die Binomialkoeffizienten. Diese ist spaltenweise im Pascalschen Dreieck:

$$\frac{t^i}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-i}{n} t^k.$$

Somit ist das Lemma bewiesen. □

Satz 23 (Worpitzky-Identität)**.** *Für alle $n \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \binom{x+n-k}{n}.$$

Beweis. Der Beweis soll mithilfe von Satz 21 erfolgen.

$$\begin{aligned}
\frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} &\overset{(1)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i}\left(\frac{t^i}{(1-t)^{n+1}}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-i}{n} t^k \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i}\binom{k+n-i}{n}\right) t^k.
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt nutzen wir die Definition der Euler-Polynome (Gleichung (5)) und für Gleichheit (2) das gerade bewiesene Lemma 22 aus. Im letzten Schritt tauschen wir die Summen, wir summieren nun erst über i, um damit dann die Koeffizienten für t^k zu bekommen. Nach Satz 21 wissen wir, dass $\frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0}(k+1)^n t^k$ gelten muss. Demnach muss $\sum_{i=0}^{n-1} A_{n,i}\binom{k+n-i}{n}$ dem Ausdruck $(k+1)^n$ entsprechen. Insgesamt erhalten wir dadurch, dass $\sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k}\binom{x+n-k}{n} = (x+1)^n$, womit die Worpitzky-Identität bewiesen ist. $\square$

Als nächstes soll ein Beispiel aufgezeigt werden. Dieses gibt aber nur einen kleinen Einblick, da wir in der Worpitzky-Identität zwei Variablen haben — das x und das n. Daher soll das n festgesetzt werden und anhand von einigen verschiedenen Werten für x überprüft werden ob die Identität stimmt.

Beispiel. *Sei $n = 5$, dann gilt folgendes:*

$$\begin{aligned}
(x+1)^5 &= \sum_{k=0}^{4} A_{5,k}\binom{x+5-k}{5} \\
&= A_{5,0}\binom{x+5-0}{5} + A_{5,1}\binom{x+5-1}{5} + A_{5,2}\binom{x+5-2}{5} + A_{5,3}\binom{x+5-3}{5} + A_{5,4}\binom{x+5-4}{5} \\
&= 1\binom{x+5}{5} + 26\binom{x+4}{5} + 66\binom{x+3}{5} + 26\binom{x+2}{5} + 1\binom{x+1}{5}
\end{aligned}$$

Es lässt sich nun nicht wirklich erkennen, ob dies wirklich $(x+1)^5$ entspricht, also wollen wir die letzte Zeile für $x = 0,1,2,3$ berechnen. Dies kann es zwar nicht für alle Werte verifizieren, gibt aber einen ersten Eindruck, neben dem Beweis.

$$\begin{aligned}
(0+1)^5 &= 1\tbinom{0+5}{5} + 26\tbinom{0+4}{5} + 66\tbinom{0+3}{5} + 26\tbinom{0+2}{5} + 1\tbinom{0+1}{5} = 1+0+0+0+0 = 1 \\
(1+1)^5 &= 1\tbinom{1+5}{5} + 26\tbinom{1+4}{5} + 66\tbinom{1+3}{5} + 26\tbinom{1+2}{5} + 1\tbinom{1+1}{5} = 6+26\cdot 1+0+0+0 = 32 \\
(2+1)^5 &= 1\tbinom{2+5}{5} + 26\tbinom{2+4}{5} + 66\tbinom{2+3}{5} + 26\tbinom{2+2}{5} + 1\tbinom{2+1}{5} = 1\cdot 21+26\cdot 6+66\cdot 1+0+0 = 243 \\
(3+1)^5 &= 1\tbinom{3+5}{5} + 26\tbinom{3+4}{5} + 66\tbinom{3+3}{5} + 26\tbinom{3+2}{5} + 1\tbinom{3+1}{5} = 56+26\cdot 21+66\cdot 6+26\cdot 1+0 = 1024
\end{aligned}$$

4.3 Asymptotik

An dieser Stelle soll auf das asymptotische Verhalten der Euler-Zahlen eingegangen werden. Zum einen, wenn wir die Euler-Zahlen mit festem k haben und $n \to \infty$ laufen lassen, und zum anderen wird eine Verbindung der Euler-Zahlen mit der Normalverteilung aufgezeigt. Die Euler-Zahlen $A_{n,k}$ verhalten sich wie $(k+1)^n$ für ein festes $k \geq 0$ und $n \to \infty$.

Satz 24. *Für ein festes $k \geq 0$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n,k}}{(k+1)^n} = 1.$$

Beweis. Um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{n,k}}{(k+1)^n} = 1$ gilt, nutzen wir (5). Wir formen also wie folgt um, wobei wir die Definition der Euler-Polynome ausnutzen:

$$\frac{A_{n,k}}{(k+1)^n} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} (-1)^i \frac{(k+1-i)^n}{(k+1)^n}$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{n+1}{i} (-1)^i \left(1 - \frac{i}{k+1}\right)^n}_{a_{n,i} \, mit \, k \, fest}.$$

Wir betrachten nun die Konvergenz für die Summe $\sum_{i=0}^{k} a_{n,i}$, die für $i = 0$ den Wert 1 hat, und für $i \neq 0$ wollen wir zeigen, dass $a_{n,i} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt. Die Untersuchung dieser Konvergenz erfolgt über das Leibnizkriterium. Da $\sum_{i=0}^{k} a_{n,i}$ eine endliche alternierende Reihe ist, genügt es, zu zeigen, dass diese gegen 0 konvergiert. Werten wir die einzelnen Faktoren aus:

$$\binom{n+1}{i} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$
$$\left(1 - \frac{k}{k+1}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

sehen wir dass diese in verschiedene Richtungen laufen. Da $\binom{n+1}{i}$ ein Polynom ist und $\left(1 - \frac{k}{k+1}\right)^n$ eine exponetielle abfallende Funktion, überwiegt letztere bei der Betrachtung der Konvergenz. Das Produkt der beiden strebt daher ebenfalls gegen 0, womit die Reihe konvergiert.

Wir wissen nun, dass die Reihe konvergiert, aber gegen welchen Wert? Da wir $a_{n,0} = 1$ haben und wenn $k \neq 0$, dass $a_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt, folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{n,k}}{(k+1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{n,k} = 1$. □

In [5] haben die Autoren einen Beweis dafür gegeben, dass sich die Summe der Euler-Zahlen unter bestimmten Bedingungen genauso verhält wie die Normalverteilung.

5 Erzeugendenfunktionen

In diesem Kapitel werden Erzeugendenfunktionen thematisiert. Dies sind (unendliche) Reihen, die eine bestimmte Folge von Zahlen als Koeffizienten besitzen und diese auf einfache und kompakte Weise kodieren. Dabei agieren die Erzeugendenfunktionen als Hilfsmittel — es handelt sich dabei um eine Funktion, die die ganze Folge „kennt“.

5.1 Grundlagen zu Erzeugendenfunktionen

Tittmann gibt in seinem Werk „Einführung in die Kombinatorik“ [19] einen anschaulichen Überblick über diese Art von Reihen. Die in diesem Kapitel beschriebenen Sätze und Aussagen sind daher an ihn angelehnt, weitere Quellen sind [11, 17].

Nehmen wir uns ein kleines Beispiel vor: Wenn die Folge $4, 6, 8, 19, 26, 74, \ldots$ dargestellt werden soll, arbeiten wir mit der Reihe, die ausgeschrieben die folgende Form besitzt: $4 + 6x + 8x^2 + 19x^3 + 26x^4 + 74x^5 + \cdots$ — sie ist die Erzeugendenfunktion der Folge. An ihr kann man jeden Koeffizienten und somit jedes Folgenglied ablesen.

Definition 25. [Potenzreihen als Erzeugendenfunktionen] Die Erzeugendenfunktion einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die formale Potenzreihe, deren Koeffizienten durch a_n gegeben sind. Dabei muss die Reihenfolge der Koeffizienten mit der Reihenfolge der Folge, die kodiert werden soll, übereinstimmen. Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ die Erzeugendenfunktion.

Der Begriff der „formalen“ Potenzreihe kommt daher, dass wir x^k an sich gar nicht betrachten, sondern nur beim Rechnen nutzen [1, S. 57]. Wir erhalten somit das k-te Folgenglied, indem wir uns den

k-ten Koeffizienten der Erzeugendenfunktion anschauen. Es bedarf oft deutlich weniger Arbeit, sich ein bestimmtes Reihenglied anzusehen, anstatt eine Rekursion bis zu einem bestimmten Wert zu berechnen. Addition und Multiplikation von Erzeugendenfunktionen entsprechen der von Potenzreihen.

Definition 26. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)n \in \mathbb{N}$ zwei beliebige Folgen, dann gelten für die Addition und die Multiplikation, der zugehörigen Erzeugendenfunktionen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k.$$

Beispiel. *Die geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots$$

ist die Erzeugendenfunktion für die Folge $1,1,1,\ldots$*, da vor jedem* x *eine* 1 *steht.*

Beispiel. *Wenn wir nun noch einmal auf den binomische Lehrsatz (siehe Satz 3) eingehen, erkennen wir, dass dieser die Erzeugendenfunktion für die Folge der Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ *für festes n und Folgenindex k an gibt. Für* $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ *wird der Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ *mit* x^k *multipliziert.*

Exponentielle Erzeugendenfunktionen sind eine weitere Form dieser Funktionengattung. Wir haben immer noch die Folge der $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die kodiert werden soll, aber anstelle von x^k haben wir den Bruch $\frac{x^k}{k!}$, mit dem wir unser Folgenglied a_k jeweils multiplizieren [1, S. 57]. Wir schreiben dies an dieser Stelle noch einmal aus, da sich die Multiplikation von der gerade gezeigten unterscheidet.

Definition 27. [Exponetielle Funktionen als Erzeugendenfunktionen] Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann hat die exponentielle Erzeugendenfunktion die Form

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!} = b_0 + b_1 \frac{x^1}{1!} + b_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + b_n \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Definition 28. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder beliebige Folgen, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \frac{x^k}{k!},$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

5.2 Euler-Polynome und Erzeugendenfunktionen

In diesem Abschnitt sollen die Euler-Polynome in zwei verschiedenen Erzeugendenfunktionen vorgestellt werden. Die Euler-Polynome sind die Erzeugendenfunktion der Euler-Zahlen — letztere sind die Koeffizienten der Polynome und somit durch diese kodiert. Dabei handelt es sich um endliche Reihen, da wir beispielsweise für $n = 5$ das folgende Polynom erhalten [9, S. 10]:

$$\begin{aligned} A_5(t) &= \sum_{k=0}^{5-1} A_{5,k} t^k \\ &= A_{5,0}t^0 + A_{5,1}t^1 + A_{5,2}t^2 + A_{5,3}t^3 + A_{5,4}t^4 \\ &= 1 + 26t + 66t^2 + 26t^3 + 1t^4. \end{aligned}$$

Der erste Koeffizient ist $A_{5,0}$, der zweite $A_{5,1}$ und so weiter bis wir beim letzten, $A_{5,4}$, sind. Die Euler-Polynome sind durch die Koeffizienten der folgenden exponentiellen Erzeugendenfunktionen [9, S. 10]

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{t-1}{t-e^{((t-1)x)}}$$

gegeben.

Beweis. Der Beweis erfolgt nach [17, S. 13, 369].
Sei $A(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\frac{x^n}{n!}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{A(t,x/(1-t))}{1-t} &\overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}}\frac{x^n}{n!} \overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n t^k\right)\frac{x^n}{n!} \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x(k+1))^n}{n!} \overset{(4)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{x(k+1)} \overset{(5)}{=} e^x \sum_{k=0}^{\infty}(te^x)^k \overset{(6)}{=} \frac{e^x}{1-te^x}.\end{aligned}$$

Bei Gleichheit (1) setzten wir unsere Werte t und $x/(1-t)$ in die Gleichung ein. Im zweiten Schritt nutzen wir die Carlitz-Identität, Satz 21. Bei (3) ändern wir die Reihenfolge der Summen. In Schritt (4) wird die Exponentialreihe genutzt und bei Schritt (5) ziehen wir e^x vor die Summe und ziehen k als Exponent aus t und e heraus. Im letzten Schritt nutzen wir die geometrische Reihe. Nun setzen wir $u = (\frac{x}{1-t})$, wodurch wir $x = u(1-t)$ erhalten. Diesen Ausdruck setzten wir in $\frac{e^x}{1-te^x}$ ein, was uns zu den folgenden Äquivalenzen führt:

$$\begin{aligned}A(t,u) &\overset{(1)}{=} \frac{(1-t)e^{u(1-t)}}{1-te^{u(1-t)}} \overset{(2)}{=} \frac{1-t}{e^{-u(1-t)}-t} \\ &\overset{(3)}{=} \frac{t-1}{t-e^{u(t-1)}}.\end{aligned}$$

Da $A(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\frac{u^n}{n!} = \frac{t-1}{t-e^{((t-1)u)}}$ gilt, ist der Satz bewiesen. □

Die erste Gleichheit gilt, da wir $x = u(1-t)$ einsetzen und mit $(1-t)$ multipliziert haben. Die Multiplikation mit $(1-t)$ im Zähler des Bruchs ist wichtig, da wir zu Beginn $\frac{A(t,x/(1-t))}{1-t}$ hatten, aber $A(t,x)$ haben wollen. Gleichheit (2) gilt, da wir $e^{u(1-t)}$ raus kürzen. Es gilt (3), da wir den Bruch lediglich mit (-1) multiplizieren, die Vorzeichen sich also umkehren.

6 Die Überträge in der schriftlichen Addition

Wenn wir an unsere Grundschulzeit denken, dann erinnern wir uns (hoffentlich) auch an die schriftliche Addition. Wir haben mehrere Zahlen untereinander geschrieben, um diese Spalte für Spalte zu addieren, wobei wir ab und an einen Übertrag hatten, weil die addierten Ziffern zusammen addiert größer als 9 waren. Wenn es mehr als zwei Zahlen waren, dann kam es auch vor, dass wir als Übertrag die 2 oder eine größere Zahl hatten. Nun aber die Frage, um die es hier gehen soll: Wie wahrscheinlich ist es, dass wir überhaupt einen Übertrag bei m Zahlen haben, und wie wahrscheinlich sind die einzelnen Überträge, die vorkommen können?

6.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt wollen wir uns Markov-Ketten, sowie Übergangsmatrizen definieren, da wir mit diesen arbeiten, um die Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag in einer Spalte der schriftlichen Addition zu bestimmen. Denn es ist an dieser Stelle nicht nur wichtig, welche Zahlen wir bereits in der Spalte haben, sondern auch, welchen Übertrag wir aus den vorherigen Spalten mit in die momentane Spalte genommen haben.

Wir wollen uns ein Experiment mit einer abzählbaren Menge an Ergebnissen vornehmen. Wir wiederholen das Experiment m-mal und notieren mit X_n das Ergebnis des n-ten Durchgangs, $n \in \{1,2,\ldots,m\}$. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis im n-ten Durchgangs kann dabei allgemein von den Ergebnissen der vorherigen $n-1$ Versuche abhängen. Wenn unser Ergebnis X_n nur vom Ergebnis X_{n-1} abhängt, dann formt die Folge eine Markov-Kette [3, S. 390]. Diese kann mit bedingten Wahrscheinlichkeiten dargestellt werden.

Definition 29. [Markov-Kette] Sei $\{X_n\}_0^\infty$ eine Folge von Zufallsvariablen. Diese formt genau dann eine Markov-Kette, wenn

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i,\, X_{n-2} = x_{n-2},\, \ldots,\, X_0 = x_0) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i).$$

Definition 30. [Zustandsraum] [3, S. 390] Ein Zustandsraum ist die Menge an möglichen Ereignissen — den verschiedenen Zuständen, die die Markov-Kette annehmen kann.

Um die erhaltenen Ergebnisse übersichtlich darzustellen, werden Übergangsmatrizen genutzt. In ihnen sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Markov-Kette eingetragen.

Definition 31. [Übergangsmatrix] Als Übergangsmatrix wird die Matrix $\Pi = (\pi_{ij})$ bezeichnet, bei der π_{ij} die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ bezeichnet. Die Übergangsmatrix hat die Form

$$\Pi = (\pi_{ij}) = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \ldots & \pi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{m1} & \ldots & \pi_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1) & \ldots & P(X_n = m \mid X_{n-1} = 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = m) & \ldots & P(X_n = m \mid X_{n-1} = m) \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften einer Übergangsmatrix sind:

- Alle Einträge sind nicht negativ ($\pi_{ij} \geq 0$), da wir keine negative Wahrscheinlichkeit haben können.
- Für jede Zeile der Matrix gilt: $\sum_{j=0}^{m} \pi_{ij} = 1$. Dies ist der Fall, da die Zeile den Zustand angibt den wir als letztes hatten und die Spalte den Zustand den wir jetzt haben. Die Summe aller bedingten Wahrscheinlichkeiten, die aufgrund des letzten Zustandes auftreten können, ergibt 1.
- Sie ist quadratisch, da wir die Wahrscheinlichkeiten jedes Zustands i zu jedem der m möglichen Zustände beschreiben.

Beispiel. *Als Beispiel für eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix können wir uns zwei Münzen vorstellen, die wir mit M_1 und M_2 bezeichnen wollen. Sei M_1 eine faire Münze. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit für Zahl und Kopf beträgt jeweils $\frac{1}{2}$. Sei M_2 eine nicht-faire Münze mit: $P(Kopf) = \frac{1}{3}$ und $P(Zahl) = \frac{2}{3}$. Wenn wir Kopf werfen, bleiben wir bei der Münze, die wir gerade geworfen haben und werfen sie erneut. Haben wir Zahl geworfen, so werfen wir im nächsten Wurf die andere Münze. Mit π_{ij} bezeichnen wir wieder unsere bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür das wir im n-ten Wurf j als Ergebnis haben, unter der Voraussetzung dass wir im $n-1$-ten Wurf i hatten. Die Übergangsmatrix ist:*

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = M_1 \mid X_{n-1} = M_1) & P(X_n = M_2 \mid X_{n-1} = M_1) \\ P(X_n = M_1 \mid X_{n-1} = M_2) & P(X_n = M_2 \mid X_{n-1} = M_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Der Wert $2/3$ unten links bezeichnet beispielsweise die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass wir unter der Bedingung, dass wir gerade die zweite Münze geworfen haben, im nächsten Wurf die erste Münze werfen werden.

6.2 Überträge

Dieser und die folgenden Abschnitte bauen auf Holte [14] auf, der die Zusammenhänge der Übergangsmatrix mit den Euler-Zahlen erstmals entdeckt hat. Zusätzlich dient [17] dazu die Erklärungen zu vereinfachen. Da es sprachlich einfacher ist, werden in dieser Arbeit die Begriffe „Carry-in“ (ein Übertrag, den wir aus der vorherigen Spalte mit in die jetzige genommen haben) und „Carry-out“ (ein Übertrag, den wir von unserer momentanen Spalte mit in die nächste nehmen) genutzt. Sehen wir uns ein Beispiel an, um das Prinzip etwas besser zu verstehen. Dabei sind in der obersten Zeile die Carry-ins der jeweiligen Spalte geschrieben, die dem Carry-out der vorherigen Spalte entsprechen.

Tabelle 4: Beispiel für die Addition von drei Zahlen der Länge 50.

2	**21001**	**12220**	**11111**	**11011**	**01111**	**12211**	**11101**	**01222**	**22111**	**1111**
	77601	74454	09802	64204	91815	64696	13942	24478	78986	62567
	58370	43789	22178	31755	10146	22856	29461	11596	66744	37630
	97422	55997	07784	25822	17997	64483	95563	70747	69811	94159
2	33304	74240	39765	21587	19959	52030	38967	06832	15542	94456

Wie haben drei Zahlen der Länge 50, deren Ziffern zufällig, unabhängig und gleichverteilt sind. Wenn wir nachzählen, wie oft die einzelnen Überträge vorkommen, gelangen wir zu dem Ergebnis, dass die 1 mit 31-mal am häufigsten auftritt, gefolgt von 12-mal der 2 und 7-mal der 0. Dies führt zu Wahrscheinlichkeiten von 62% für den Übertrag 1, von 24% für den Übertrag 2 und von 12% für den Übertrag 0. Dies scheint logisch, da ein Übertrag von 0 nur dann zustande kommt, wenn die Summe der drei Ziffern einschließlich des Carry-in kleiner als 10 ist, ebenso ist es bei einem Übertrag von 2 der Fall, dass als Summe 20 bis 29 möglich ist, wir demnach wieder 10 Summen haben. Allgemein kann die Addition in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

Tabelle 5: Addition von m zufälligen Zahlen der Länge n.

Carries	$\mathbf{C_n}$	$\mathbf{C_{n-1}}$	$\mathbf{C_{n-2}}$	$\cdots$	$\mathbf{C_3}$	$\mathbf{C_2}$	$\mathbf{C_1}$	$\mathbf{C_0}$
Summanden		$X_{1,n-1}$	$X_{1,n-2}$	$\cdots$	$X_{1,3}$	$X_{1,2}$	$X_{1,1}$	$X_{1,0}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$X_{m,n-1}$	$X_{m,n-2}$	$\cdots$	$X_{m,3}$	$X_{m,2}$	$X_{m,1}$	$X_{m,0}$
Summe	S_n	S_{n-1}	S_{n-2}	$\cdots$	S_3	S_2	S_1	S_0

Es gilt immer $C_0 = 0$, da wir keine vorherige Spalte haben, die uns einen Carry-in liefern könnte.

6.3 Die Matrix Π

In Tabelle 5 nehmen wir wieder an, dass die $X_{m,n}$ zufällige, gleich verteilte und unabhängige Ziffern zwischen 0 und 9 sind. Dabei bilden die Überträge eine Markov-Kette, die sich wie folgt beschreiben lässt:

$$P(C_{k+1} = j \mid C_k = i, \ldots, C_1 = c_1, C_0 = c_0) = P(C_{k+1} = j \mid C_k = i).$$

Dabei bezeichnet C_k den k-ten Carry und c_k bezeichnet den Wert des k-ten Carries, also welchen Übertrag wir tatsächlich haben. Der Übertrag C_{k+1} hängt nur von den Ziffern $X_{1,k}$, $X_{2,k}$, $\ldots$, $X_{m,k}$ sowie dem Übertrag bei C_k ab. Die Überträge, die wir davor gemacht haben, sind irrelevant für die Summe der k-ten Spalte. Der Frage, der wir uns nun zuwenden ist: Welche Werte kann C_k überhaupt annehmen?

Proposition 32. *Wenn m Zahlen der Länge n addiert werden, ist der maximale Übertrag von C_k kleiner oder gleich $m-1$.*

Beweis. Der Beweis soll über Induktion erfolgen.

Für den Induktionsanfang $m = 2$ gilt, dass wir maximal $X_{1,0} = X_{2,0} = 9$ haben können. Zusammen ergeben die beiden Werte 18, was zu einem Übertrag von 1 führt. In der nächsten Spalte haben wir vielleicht wieder $X_{1,1} + X_{2,1} = 9$, insgesamt somit $9 + 9 + 1 = 19$. Als Carry-out ergibt dies wieder 1. Dies kann immer weiter fortschreiten, wir werden die 20 nie erreichen und somit bleibt der maximale Übertrag 1.

Die Induktionsvoraussetzung sagt aus, dass der Übertrag beim Addieren von m Zahlen maximal $m-1$ ist.

Für den Induktionsschluss wollen wir zeigen, dass der maximale Übertrag von $m+1$ Zahlen höchstens m entspricht. Wir wissen aufgrund der Induktionsvoraussetzung, dass wir beim Addieren von m Zahlen als maximalen Übertrag $m-1$ haben. Angenommen wir haben tatsächlich $m-1$ als Übertrag, dann haben wir als Summe $10(m-1) \leq X_{k,1} + \cdots + X_{k,m} + i < 10m$, wobei i wieder der Carry-in und m jetzt unser Carry-out ist. Addieren wir nun in dieser Spalte als weitere Ziffer $X_{k,m+1} = 9$ dazu (insgesamt demnach $m+1$ Ziffern) gilt: $10m \leq X_{k,1} + \cdots + X_{k,m} + 9 + i < 10(m+1)$. □

Dass der maximale Übertrag $m-1$ entspricht, sieht man auch in Tabelle 4. Wir haben $m = 3$ Zahlen addiert und die Überträge $0, 1$ und 2 erhalten — der Zustandsraum von C_k entspricht daher der Menge $\{0, 1, 2\}$. Wir bezeichnen unsere Übergangsmatrix wieder mit $\Pi = (\pi_{ij})$, und die einzelnen Einträge der Matrix haben die Form

$$\pi_{ij} = P(Carry - out = j \mid Carry - in = i) \quad wobei\ i, j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}. \tag{6}$$

Um einen einzelnen Eintrag der Matrix Π zu berechnen, also ein π_{ij}, schauen wir uns die Addition an k-ter Stelle an — dies ist die Addition die zum Übertrag C_{k+1} führt.

$$\begin{aligned} C_{k+1} = j \quad &\Leftrightarrow \quad 10j \leq i + X_{1,k} + X_{2,k} + \cdots + X_{m,k} < (j+1)10 \\ \Longleftrightarrow \quad & X_{1,k} + X_{2,k} + \cdots + X_{m,k} + Y = (j+1)10 - 1 - i =: z. \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei ist das Y eine von Holte zusätzlich eingeführte slack variable und es gilt $0 \leq X_{1,k}, \ldots, X_{m,k}, Y \leq 9$. Die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (7) entspricht dem Koeffizienten von x^z im Term

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + \cdots + x^9)^{m+1} &= (1 - x^{10})^{m+1}(1-x)^{-(m+1)} \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{r=0}^{m+1} (-1)^r \binom{m+1}{r} x^{10r} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+s}{s} x^s \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} (-1)^r \binom{m+1}{r} \binom{m+s}{m} x^{10r+s} \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{z=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{m+1}{r} \binom{m+z-10r}{m} \right) x^z. \end{aligned}$$

Es gilt (1), da wir für $(1-x^{10})^{m+1}$ den binomischen Lehrsatz und für $(1-x)^{-(m+1)}$ die binomische Reihe nutzen. Für (2) fassen wir die zwei Summen zusammen. Wir können bei $-\infty$ starten, da die Binomialkoeffizienten 0 ergeben, solange $r < 0$ oder $s < 0$. Zuletzt gilt (3), da wir $s = z - 10r$ setzten. Wenn $r > z/10$ ist, wird $\binom{m+z-10r}{m}$ wieder 0. Insgesamt sind wir in den einzelnen Schritten bijektiv von r, s zu r, z gegangen, um die Koeffizienten von x^z berechnen zu können. Der gesuchte Koeffizient von x^z ist demnach

$$\sum_{r=0}^{z/10} (-1)^r \binom{m+1}{r} \binom{m+z-10r}{m}.$$

Holte ergänzt an dieser Stelle noch, dass $r \leq z/10 = j + 1 - (i+1)/10$, nur wenn $r \leq j - \lfloor i/10 \rfloor$ ist. Für die Übergangsmatrix gilt daher:

Satz 33. *Der Prozess der Überträge für die Addition von m Zahlen der Länge n zur Basis* 10 *ist eine endliche Markov-Kette, mit Zustandsraum* $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ *und der Übergangsmatrix* $\Pi = (\pi_{ij})$. *Dabei sei* $\Pi(m)$ *die Übergangsmatrix für die Addition von m Zahlen bezeichnet, mit den Einträgen*

$$\pi_{ij} = \frac{1}{10^m} \sum_{r=0}^{j - \lfloor i/10 \rfloor} (-1)^r \binom{m+1}{r} \binom{m-1-i+(j+1-r)10}{m}.$$

Dabei sind die π_{ij} aus (6) die gerade genannten Einträge in der Matrix Π.

Beispiel. *Für $m = 2,3,4,5$ erhalten wir die folgenden Übergangsmatrizen $\Pi(m)$:*

$$\begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,22 & 0,66 & 0,12 \\ 0,165 & 0,67 & 0,165 \\ 0,12 & 0,66 & 0,22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0715 & 0,528 & 0,3795 & 0,021 \\ 0,0495 & 0,484 & 0,4335 & 0,033 \\ 0,033 & 0,4335 & 0,484 & 0,0495 \\ 0,021 & 0,3795 & 0,528 & 0,0715 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0,02002 & 0,30492 & 0,53262 & 0,13992 & 0,00252 \\ 0,01287 & 0,25927 & 0,54747 & 0,17577 & 0,00462 \\ 0,00792 & 0,21582 & 0,55252 & 0,21582 & 0,00792 \\ 0,00462 & 0,17577 & 0,54747 & 0,25927 & 0.01287 \\ 0,00452 & 0,13992 & 0,53262 & 0,30492 & 0,02002 \end{pmatrix}.$$

Der Wert $0,165$ bei der Matrix für $m = 3$ in der dritten Spalte sagt zum Beispiel aus, dass wir bei einen Carry-in von 1 (da $0,165$ in der zweite Zeile steht) mit einer Wahrscheinlichkeit von $16,5\%$ einen Carry-out von 2 (da $0,165$ in der dritte Spalte steht) haben werden. Es fällt ebenfalls auf, dass die Matrizen punktsymmetrisch sind. Für den Beweis dieser Aussage sei auf [14] verwiesen.

6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt jede Matrix, aber warum sind die der Matrix Π für uns von besonderem Interesse? In ihnen finden wir die Euler-Zahlen wieder. Ein besonderer Vektor ist der stationary probability Vektor $v = (p_0, p_1, \dots, p_{m-1})$, der die Bedingung $v\Pi = v$ erfüllt, was ihn zu einem linken Eigenvektor macht, der zu dem Eigenwert $\lambda = 1$ gehört — dies gilt für jedes beliebig gewählte m. Aber wie kommen wir darauf, zu sagen, dass 1 überhaupt ein Eigenwert der Matrix ist? Diese Frage beantwortet der Satz 34. Dabei bezeichnen wir im Folgenden die Matrix der linken Eigenvektoren mit V und die inverse Matrix zu V mit V^{-1}. Wenn wir uns auf eine Matrix zu einem bestimmten m beziehen schreiben wir $V(m)$.

Satz 34. *Die Eigenwerte von Π sind durch die geometrische Folge $1, 1/10, \dots, 1/10^{m-1}$ gegeben.*

Satz 35. *Die unterste Zeile der Matrix V entspricht für m der $(m-1)$-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks, wobei die Zeile in V mit alternierenden Vorzeichen versehen ist, positiv beginnend.*

Satz 36. *Die oberste Zeile der Matrix $V(m)$ entspricht den Euler-Zahlen $A_{m,k}$.*

Nach Satz 34 entspricht die letzte Zeile von V dem Eigenvektor zum Eigenwert $1/10^{m-1}$ und die erste Zeile dem Eigenvektor zum Eigenwert 1 unddemnach dem Vektor v. Für diese Sätze soll es an dieser Stelle keine ausführlichen Beweise geben, diese können in [14] nachgelesen werden. Es steht im Vordergrund die Bedeutung der Euler-Zahlen in der Matrix V zu verdeutlichen.

Beispiel. *Wir wollen uns die Berechnung vom Vektor v im Folgenden für $m = 2$ genauer anschauen*

$$v\Pi = (p_0, p_1) \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} = (p_0 \cdot 0,55 + p_1 \cdot 0,45,\ p_0 \cdot 0,45 + p_1 \cdot 0,55) = (p_0, p_1).$$

Wir erhalten als Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0,55p_0 + 0,45p_1 &= p_0 \\ 0,45p_0 + 0,55p_1 &= p_1. \end{aligned}$$

Mithilfe von Umformungen erhalten wir $p_0 = p_1$. Da die einzelnen Einträge des Vektors insgesamt 1 ergeben müssen, gilt $p_0 + p_1 = 1$ und somit $p_0 = p_1 = 0,5$. Der Vektor v hat für $m = 2,3,4$ die folgende Form:

$$\begin{aligned}
m = 2 &: v = (1/2,\ 1/2)\\
m = 3 &: v = (1/6,\ 4/6,\ 1/6)\\
m = 4 &: v = (1/24, 11/24, 11/24, 1/24).
\end{aligned}$$

Wir wollen uns nun die Matrizen $V(m) = [v_{ij}(m)]$ für $m = 2,3,4,5$ anschauen. Dabei bezeichnet $v_{ij}(m)$ den Eintrag der i-ten Zeile und der j-ten Spalte der Matrix $V(m)$. Um die Matrix $V(2)$ vollständig berechnet zu haben fehlt uns noch der Eingenvektor w zum Eigenwert $1/10$. Dieser wird analog zu dem Vektor v berechnet. Wir müssen $w\Pi = w1/10$ lösen, was uns zu $p_0 + p_1 = 0,1(p_0 + p_1)$ führt, und wir erhalten $p_0 = -p_1$. Der Vektor w hat die Form $w = (1,-1)$. Wir haben bei $v = (1,1)$, wenn wir es ganzzahlig machen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & -10 & -1 \\ 1 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der erste beschäftigt sich mit der Rekursion von V, die eine Ähnlichkeit mit der linearen Rekursion von den Euler-Zahlen (4) aufweist.

Satz 37. *Sei $0 \leq i < m$, dann gilt für die Einträge $v_{ij}(m)$ der Matrix $V(m)$:*

$$\begin{aligned}
v_{ij}(m) = (j+1)v_{ij}(m-1) + (m-j)v_{i,j-1}(m-1) \\
\text{mit } \ v_{i,-1}(m) = 0 \text{ und } v_{im}(m) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Beispiel. *Sei $m = 5$, $i = 1$ und $j = 3$, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
v_{13}(5) &= (3+1)v_{13}(5-1) + (5-3)v_{1,3-1}(5-1)\\
&= 4v_{13}(4) + 2v_{12}(4)\\
&= 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = -10.
\end{aligned}$$

Im Beweis gibt Holte auch eine alternierende Formel an, um die Einträge der Matrix zu berechnen. Hier zeigt sich wieder der Zusammenhang mit den Euler-Zahlen. Die alternierende Formel ist:

$$v_{ij}(m) = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \binom{m+1}{r} (j+1-r)^{m-1}. \tag{9}$$

Nun kommen wir zu der Diagonalisierbarkeit der Matrix Π.

Beispiel. *Mit Satz 34 kennen wir die Eigenwerte, dass heißt, wir müssen die Eigenvektoren dazu berechnen — diese ordnen wir dann in der Matrix $V^{-1}(4)$ an:*

$$V^{-1}(4) = \begin{pmatrix} 1/24 & 1/4 & 11/24 & 1/4 \\ 1/24 & 1/12 & -1/24 & -1/12 \\ 1/24 & -1/12 & -1/24 & 1/12 \\ 1/24 & -1/4 & 11/24 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Zur Ergänzung sei die Matrix der rechten Eigenvektoren gegeben, die wir mit U bezeichnen wollen.

Wir sehen eine Ähnlichkeit mit V^{-1} — wenn wir die Spalten von U anpassen erhalten wir V^{-1}.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/3 & -1/11 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -1/11 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel. *Wir überprüfen die Matrixmultiplikation $D = V\Pi V^{-1}$ für $m = 4$ und somit auch die Matrix V^{-1}:*

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,0715 & 0,528 & 0,3795 & 0,021 \\ 0,0495 & 0,484 & 0,4335 & 0,033 \\ 0,033 & 0,4335 & 0,484 & 0,0495 \\ 0,021 & 0,3795 & 0,528 & 0,0715 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{24} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} & \frac{-1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{-3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{100} & \frac{-1}{100} & \frac{-1}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{1000} & \frac{-3}{1000} & \frac{3}{1000} & \frac{-1}{1000} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{24} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{24} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} & \frac{-1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 38. *Die Spalte ganz links von V besteht nur aus der Zahl* 1.

Beweis. Die Aussage lässt sich beweisen, indem wir die uns die Rekursion für die Matrix V zuhilfe nehmen. In Satz 37 haben wir die einzelnen Einträge definiert. Die Einträge haben stehts die Form

$$v_{i0}(m) = (0+1)v_{i0}(m-1) + (m-0)v_{i,0-1}(m-1),$$

wobei der zweite Summand immer 0 entspricht, da wir $v_{i,-1}(m-1)$ haben. Es muss demnach lediglich der erste Summand betrachtet werden. Da wir dort $1v_{i0}(m-1)$ haben kommt bei $v_{i0}(m)$ der gleiche Wert, der auch bei $v_{i0}(m-1)$ in der Matrix steht. Für die letzte Zeile gilt

$$\begin{aligned} v_{m-1,0} &= \sum_{r=0}^{0} (-1)^r \binom{m+1}{r} (0+1-r)^{m-(m-1)} \\ &= (-1)^0 \binom{m+1}{0} (0+1-0)^{m-(m-1)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Jedes mal wenn wir eine Zahl mehr addieren, also von m auf $m+1$ gehen, fügen wir die 1 in der ersten Spalte der letzten Zeile ein. Für $V(2)$ haben wir die Matrix berechnet und gesehen dass wir nur die 1 als Eintrag haben. Wir haben ebenfalls gerade gezeigt dass wir in den weiteren Matrizen die bisherigen Einträge übernehmen und nur mit einer 1 in der letzten Zeile ergänzen. Somit ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 39. *Die rechte Spalte von V hat alternierend die Zahlen* 1 *und* −1.

Beweis. Dieser Satz soll ebenfalls mithilfe der Rekursionsformeln (8) und (9) erfolgen. Für die Einträge der letzten Spalte gilt

$$v_{i,m-1}(m) = (m)v_{i,m-1}(m-1) + v_{i,m-2}(m-1).$$

Der erste Summand fällt weg, da $v_{m-1}(m-1) = 0$ ist. Es muss sich nur der zweite Summand angeschaut werden. Wir haben demnach

$$v_{i,m-1}(m) = v_{i,m-2}(m-1),$$

weshalb der Eintrag $v_{m-2,m-2}(m)$ dem dem Eintrag $v_{m-1,m-1}(m)$ entspricht. Wir müssen auf diese Weise wieder den Eintrag aus der vorherigen Matrix übernehmen. Für die letzte Zeile können wir diese Formel aber wieder nicht anwenden, weshalb wir den Satz 35 nutzen. Wir wissen, dass die letzte Zeile der Matrix $V(m)$ der $m-1$-ten Zeile des pascalschen Dreiecks entspricht. Die einzelnen Einträge sind demnach:

$$v_{m-1,j}(m) = (-1)^j \binom{m-1}{j}.$$

Für die letzte Spalte haben wir:

$$v_{m-1,m-1}(m) = (-1)^{m-1} \binom{m-1}{m-1} = (-1)^{m-1}.$$

Wenn m geradzahlig ist, dann ist der letzte Eintrag der Spalte negativ, ansonsten positiv. □

Satz 40. *Wenn m Zahlen addiert werden beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen Übertrag k zu haben dem Wert*

$$p_{mk} = \frac{A_{m,k}}{m!} \quad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Satz 41 (Satz von Perron-Frobenius)**.** *Der im Betrag größte Eigenwert von Π konvergiert gegen die stable distribution der Matrix Π. Sei Π eine positive $m \times m$ Matrix. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:*

*(1) Für eine quadratische Matrix ist $\rho(\Pi)$ der **Spektralradius** von Π. Dieser sei wie folgt definiert: $\rho(\Pi) = max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } \Pi\}$. Es gilt $\rho = \lambda_1 = 1$, da 1 immer ein Eigenwert einer stochastischen, quadratischen Matrix ist, alle anderen Eigenwerte bezeichnen wir mit λ_i.*

(2) Es existiert ein rechter Eigenvektor $x = (x_0, \ldots, x_{m-1})$ von Π zu dem Eigenwert λ_1 so dass $x_i > 0$ für $0 \le i \le m-1$ und dass $\Pi x = \lambda_1 x$. Ebenso existiert ein linker Eigenvektor y, für den $y\Pi = y\lambda_1$ mit $y_i > 0$ für $0 \le i \le m-1$ gilt.

(3) Es gilt: $\lim_{n\to\infty} \Pi^n/\lambda_1 = xy^t$, wobei die Eigenvektoren normalisiert sind, so dass $y^t x = 1$.

Der Satz folgt Brémaud [4, S. 159]. Wenden wir den Satz 41 auf unsere Matrix Π an, passiert Folgendes:

Zu (1): Der größte Eigenwert ist $\lambda_1 = 1$, egal für welches m. Dies besagt Satz 34.

Zu (2): Den linken Eigenvektor zu dem Eigenwert 1 kennen wir bereits: er entspricht dem Vektor $v = (p_0, \ldots, p_{m-1})$. Die in Satz 34 gegebenen Eigenwerte ordnen wir der Größe nach an, von 1 beginnend, zu $1/10^{m-1}$.

Wir betrachten (3): Die Matrix Π konvergiert zeilenweise gegen den linken Eigenvektor der zu 1 gehört — der stationären Verteilung v.

$$\begin{pmatrix} \pi_{00} & \cdots & \pi_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{m-1,0} & \cdots & \pi_{m-1,m-1} \end{pmatrix}^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{A_{m,0}}{m!} & \cdots & \frac{A_{m,m-1}}{m!} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{m,0}}{m!} & \cdots & \frac{A_{m,m-1}}{m!} \end{pmatrix}$$

Beweis von Satz 40. Wenn wir zurück auf den Vektor v blicken, sehen wir, dass dieser als Einträge die p_{mk} enthält. An erster Stelle steht $\frac{A_{m,0}}{m!}$, an zweiter $\frac{A_{m,1}}{m!}$ und so weiter, bis an letzter Stelle im Vektor $\frac{A_{m,m-1}}{m!}$ steht.

Der Zusammenhang liegt in dem Satz von Perron-Frobenius. Dieser geht auf den betragsgrößten Eigenwert und dessen Eigenvektoren ein, wenn A eine quadratische Matrix ist. Da der größte Eigenwert von Π den Wert 1 hat, besagt der Satz von Perron–Frobenius dass die erste Zeile der Matrix V proportional zu der stable/stationary distribution unseres Überragsprozesses ist. Damit gilt Satz 40. □

Beispiel. *Für $m = 3$ passiert nach dem Satz das folgende:*

$$\begin{pmatrix} 0,22 & 0,66 & 0,12 \\ 0,165 & 0,67 & 0,165 \\ 0,12 & 0,66 & 0,22 \end{pmatrix}^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Zeilen der Matrix konvergieren gegen die stationäre Verteilung $v = (1/6, 4/6, 1/6)$. Dies geschieht sogar schnell, wenn wir die ersten Potenzen berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0,22 & 0,66 & 0,12 \\ 0,165 & 0,67 & 0,165 \\ 0,12 & 0,66 & 0,22 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1717/10000 & 3333/5000 & 1617/10000 \\ 3333/20000 & 6667/10000 & 3333/20000 \\ 1617/10000 & 3333/5000 & 1717/10000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,22 & 0,66 & 0,12 \\ 0,165 & 0,67 & 0,165 \\ 0,12 & 0,66 & 0,22 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,167167 & 0,666666 & 0,166167 \\ 0,166667 & 0,666667 & 0,166667 \\ 0,166167 & 0,666666 & 0,167167 \end{pmatrix}$$

Wie können uns auch den rechten und linken Eigenvektor zum Eigenwert 1 anschauen und die genannten Eigenschaften überprüfen. Es gilt zum einen $x^t v = 1$:

$$(1,1,1)\begin{pmatrix} 1/6 \\ 4/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1,$$

und wir haben für $xv^t = \lim_{n\to\infty} A^n$:

$$\begin{pmatrix} 1/6 \\ 4/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

7 Abbildungen

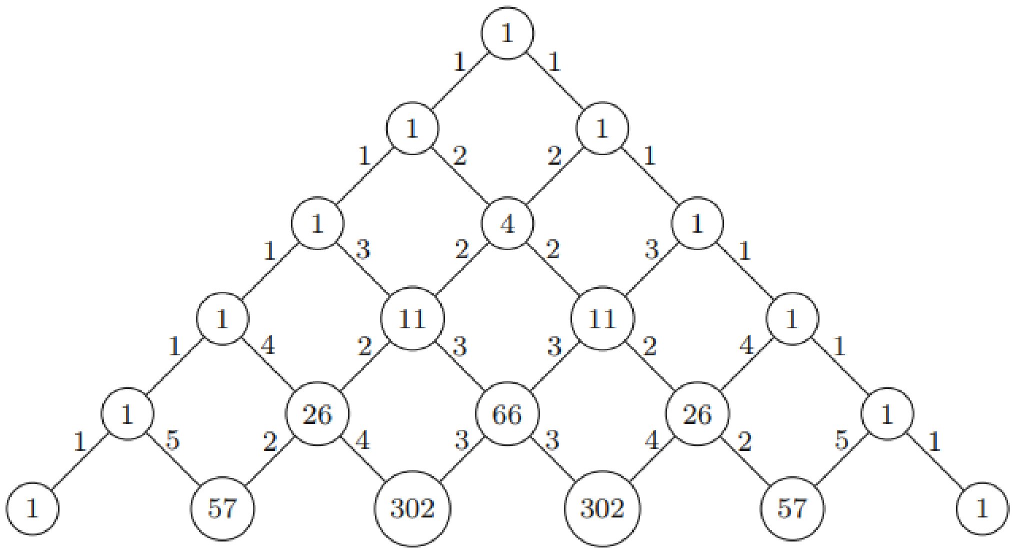

Abbildung 1: Gewichtetes Euler-Dreieck für $0 \leq k < n < 6$. Entnommen aus [17, S. 9].

Literatur

[1] Martin Aigner, *Diskrete Mathematik*, 4th ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course], Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001. MR 1887902

[2] Miklós Bóna, *Combinatorics of permutations. discrete mathematics and its applications (boca raton)*, second ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2012, With a foreword by Richard Stanley. MR 2919720

[3] Alexandr A. Borovkov, *Probability theory*, Universitext, Springer, London, 2013. MR 3086572

[4] Pierre Brémaud, *Markov chains. gibbs fields, monte carlo simulation, and queues.*, Texts in Applied Mathematics, vol. 31, Springer-Verlag, New York, 1999. MR 1689633

[5] L. Carlitz, D. C. Kurtz, R. Scoville, and O. P. Stackelberg, *Asymptotic properties of Eulerian numbers*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **23** (1972), 47–54. MR 309856

[6] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, Graduate Texts in Mathematics, 11. MR 0447532

[7] Leonhard Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, (1755), XXIV + 880.

[8] ———, *Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques*, Memoires de l'academie des sciences de Berlin **17** (1768), 83–106.

[9] Dominique Foata, *Eulerian polynomials: from Euler's time to the present*, The legacy of Alladi Ramakrishnan in the mathematical sciences, Springer, New York, 2010, pp. 253–273. MR 2744266

[10] Otto Forster, *Analysis. 1*, expanded ed., Grundkurs Mathematik. [Foundational Course in Mathematics], Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. [Differential and integral calculus of one variable]. MR 2840783

[11] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994. MR 1397498

[12] Julian Havil, *Gamma*, Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2007, Reprint of the 1958 edition. MR xvi+307

[13] Friedrich Hirzebruch, *Eulerian polynomials*, Münster J. Math. **1** (2008), 9–14. MR 2502493

[14] John M. Holte, *Carries, combinatorics, and an amazing matrix*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 2, 138–149. MR 1437415

[15] Jürg Kramer, *Zahlen für Einsteiger*, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008, Elemente der Algebra und Aufbau der Zahlbereiche. [Elements of algebra and the structure of number systems]. MR 2502519

[16] Willis Lucas Osler, Thomas J., *Translation with notes of euler's paper: Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques*, (2016).

[17] T. Kyle Petersen, *Eulerian Numbers*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, 2015, With a foreword by Richard Stanley. MR 3408615

[18] Jeffrey Stopple, *Euler, symmetric group, Riemann zeta function*, Int. J. Math. Comput. Sci. **4** (2009), no. 1, 31–36. MR 2598498

[19] Peter Tittmann, *Einführung in die Kombinatorik*, 3rd ed., Springer Berlin, 2019.