

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK

BACHELORARBEIT
IM STUDIENGANG "LEHRAMT MATHEMATIK"

Farey-Folgen & Ford-Kreise

Michael Müller

*Erstgutachter: Prof. Matthias Beck
Zweitgutachter: Prof. Rainer Sinn*

September 28, 2020

FAREY-FOLGEN UND FORD-KREISE

MICHAEL MÜLLER

ZUSAMMENFASSUNG. In der vorliegenden Arbeit beginnen wir mit der Untersuchung der Farey-Folgen und zeigen im Anschluss ihre Verbindung zu den Ford-Kreisen. Nachdem wir einige Eigenschaften bezüglich der Ford-Kreise untersucht haben, zeigen wir, dass es eine Verbindung zwischen den Ford-Kreisen und der Fibonacci Folge gibt.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Farey-Folgen	2
1.1. Einführung und Definition	2
1.2. Eigenschaften der Farey-Folgen	2
2. Ford-Kreise	6
2.1. Motivation und Definition	6
2.2. Eigenschaften von Ford-Kreisen	7
3. Fibonacci und der goldene Schnitt	10
3.1. Einführung	10
3.2. Ford und Fibonacci	11
4. Ausblick	17
4.1. Ford-Kugeln	17
Literatur	17

1. FAREY-FOLGEN

1.1. Einführung und Definition. Die Farey-Folgen sind nach dem britischen Geologen John Farey benannt, zu denen er 1816 einen Artikel [1] veröffentlichte, dort benannte er einige Eigenschaften der Folgen, jedoch ohne diese zu beweisen. Nach G.H Hardy und E.M. Wright in "An Introduction to the Theory of Numbers" bewies Cauchy die von Farey beschriebenen Eigenschaften und benannte die Folgen nach ihm. Tatsächlich hat Charles Haros, ein französischer Mathematiker, bereits im Jahr 1802, 14 Jahre vor John Farey, einige Eigenschaften der Farey-Folgen benannt und bewiesen. Heutzutage finden sich die Farey-Folgen in einer Vielzahl von Teilgebieten in der Mathematik wieder, darunter die Zahlentheorie und die Geometrie, auch die Riemannvermutung hat eine Verbindung zu den Farey-Folgen. Das folgende Kapitel basiert auf den Inhalten aus [2] und [3].

Definition 1.1. Eine Farey-Folge F_n der n -ten Ordnung beschreibt eine Menge aller gekürzter Brüche aufsteigender Reihenfolge im geschlossenen Intervall $[0, 1]$, dessen Nenner stets $\leq n$ ist.

Beispiele:

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right)$$

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right)$$

Definition 1.2. Seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zwei Brüche einer Farey-Folge. Wir definieren den Mediant von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ als

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

1.2. Eigenschaften der Farey-Folgen.

Theorem 1.3. Seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zwei Brüche einer Farey-Folge mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Dann gilt für den Mediant dieser Brüche

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Beweis.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0.$$

□

Hilfssatz 1.4. [4][Lemma von Bézout] Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren $s, t \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\text{ggT}(a, b) = sa - tb.$$

Anmerkung 1.5. Existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit

$$sa - tb = 1,$$

dann folgt $\text{ggT}(a, b) = 1$.

Theorem 1.6. Seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben mit $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. Wenn $bc - ad = 1$, dann sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Terme in F_n für folgende Werte von n :

$$\max(b, d) \leq n \leq b + d - 1.$$

Beweis. Wenden wir das Lemma von Bézout an, können wir aus der Gleichung $bc - ad = 1$ folgern, dass $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ vollständig gekürzt vorliegen. Die Bedingung $\max(b, d) \leq n$ versichert uns, dass $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in F_n sein müssen. Nehmen wir nun an, es existiert ein Bruch $\frac{h}{k}$ mit $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$. Wir behaupten, dass $k \geq b + d$. Dafür verwenden wir die Voraussetzung $bc - ad = 1$:

$$(1) \quad k = (bc - ad)k = b(ck - dh) + d(bh - ak).$$

Betrachten wir die Ungleichung $\frac{a}{b} < \frac{h}{k}$, folgern wir

$$\frac{bh - ak}{bk} = \frac{h}{k} - \frac{a}{b} > 0,$$

weshalb $bh - ak > 0$ gelten muss, insbesondere gilt $bh - ak \geq 1$, da $\frac{h}{k}, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Analog gilt $ck - dh \geq 1$. Einsetzen in Gleichung (1) liefert uns $k \geq b + d$. Man sieht jeder Bruch $\frac{h}{k}$ mit $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} \leq \frac{c}{d}$ hat einen Nenner $k \geq b + d$. Wählen wir nun n unter der Voraussetzung $n \leq b + d - 1$, dann ist $\frac{h}{k}$ nicht in F_n . Zusammen haben wir $\max(b, d) \leq n \leq b + d - 1$, das heißt $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind in F_n , aber Brüche der Form $\frac{h}{k}$ mit $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$ sind nicht in F_n . Damit sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Elemente in F_n . \square

Anmerkung 1.7. Sei $\frac{h}{k}$ der Mediant von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, dann gilt $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$ und $k = b + d$. Nach Gleichung (1) folgt deshalb

$$ck - dh = 1 \quad \text{und} \quad bh - ak = 1.$$

Nach dem Lemma von Bézout ist somit jeder Mediant zweier aufeinanderfolgender Brüche vollständig gekürzt.

Theorem 1.8. Die Menge F_{n+1} beinhaltet F_n . Jedes Element in F_{n+1} , welches nicht in F_n ist, ist ein Mediant zweier aufeinanderfolgender Elemente von F_n .

Beweis. Wir nehmen an, dass $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Elemente in F_n sind. Nach Theorem 1.6 bleiben sie aufeinanderfolgend in F_n für alle n mit

$$\max(b, d) \leq n \leq b + d - 1.$$

Betrachten wir den Medianten $\frac{h}{k}$, mit $h = a + c$ und $k = b + d$. Dieser erfüllt nach Anmerkung 1.7 die Voraussetzung $ck - dh = 1$, beziehungsweise $bh - ak = 1$ um Theorem 1.6 anzuwenden. Sei nun $n = k$, dann sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ keine Nachbarn mehr in F_k , da $k = b + d > b + d - 1$. Für unsere Menge F_k bedeutet das, dass mindestens ein neues Element zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt. Betrachten wir $\frac{a}{b} < \frac{h}{k}$ und $\frac{h}{k} < \frac{c}{d}$, so fällt auf, dass diese nach Theorem 1.6 in F_k aufeinanderfolgen, da $k = \max(b, k) = \max(k, d)$ und $k \leq k + b - 1$ beziehungsweise $k \leq k + d - 1$, da b und d mindestens 1 sein müssen. Das zeigt, dass im Schritt von F_n zu F_{n+1} jeder neue Bruch der Mediant von zwei aufeinanderfolgenden Elementen des Vorgängers ist. \square

Anmerkung 1.9. Die Eigenschaft aus dem letzten Theorem können wir uns zunutze machen, um die Konstruktion von Farey-Folgen zu optimieren. Wir verwenden dabei eine bekannte Farey-Folge F_n und ergänzen diese anschließend. Dabei wird der Mediant zweier aufeinanderfolgender Elemente zwischen diesen hinzugefügt. Einzige Voraussetzung dabei ist, dass der Nenner des Mediants $n + 1$ entsprechen muss.

Beispiel 1.10. *Betrachten wir*

$$F_5 = \left(\underbrace{0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1}_{\frac{1}{6}} \right).$$

Bilden wir den Mediant: $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$, analog berechnen wir $\frac{5}{6}$. Ergänzen wir die Brüche, so erhalten wir

$$F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right).$$

Auf den ersten Blick könnte man vermuten, dass weitere Ergänzungen mit dem Nenner 6 möglich wären, jedoch sollte auffallen, dass diese sich bereits in gekürzter Form in der Menge befinden. Neue Terme haben immer den Nenner n . Die Anzahl von zusätzlichen Elementen von F_{n-1} zu F_n ist davon abhängig, wie viele Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$ existieren, welche teilerfremd zu n sind. Dies beschreibt die Eulersche Phi-Funktion ϕ ; sie gibt für jede positive natürliche Zahl n an, wie viele zu n teilerfremde natürliche Zahlen es gibt, die nicht größer als n sind.

$$\phi(n) = \left| \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a \leq n \text{ und } \text{ggT}(a, n) = 1\} \right|.$$

Die Länge jeder Farey-Folge F_n wird also rekursiv durch folgende Formel gegeben:

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \phi(n).$$

Theorem 1.11. *Jede Farey-Folge F_n mit $n > 1$ besitzt eine ungerade Anzahl an Elementen.*

Beweis. Die Aussage gilt für F_2 , denn diese beinhaltet drei Elemente. Es ist zu zeigen, dass jede folgende Farey-Folge F_n eine ungerade Anzahl an Elementen hat, dies passiert genau dann, wenn vom Schritt F_n zu F_{n+1} eine gerade Anzahl an Elementen hinzukommt. Wir zeigen, dass $\phi(n)$ für $n > 2$ gerade ist. Nach Definition ist $\phi(n)$ die Anzahl von Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$, sodass $\text{ggT}(n, k) = 1$. Wenn $\text{ggT}(n, k) = 1$, gilt auch $\text{ggT}(n - k, k) = 1$. Im Folgenden betrachten wir $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, wobei man beachte, dass für ungerade n die Zahl $\frac{n}{2}$ keine ganze Zahl sein kann und für gerade n gilt $2 \cdot \frac{n}{2} = n$, womit $\frac{n}{2}$ für alle $n > 2$ nicht teilerfremd zu n ist. Insgesamt folgern wir, $n - k$ ist genau dann teilerfremd zu n , wenn k teilerfremd zu n ist. Somit ist $\phi(n) = 2 \cdot |(\text{die Anzahl der zu } n \text{ teilerfremden Zahlen von } 1 \text{ bis } \frac{n}{2})|$, folglich ist $\phi(n)$ eine gerade Zahl für $n > 2$, womit gezeigt ist, dass alle Farey-Folgen F_n mit $n > 1$ eine ungerade Anzahl an Elementen haben. \square

Anmerkung 1.12. *Man erkennt außerdem, dass in jeder Farey-Folge F_n mit $n > 1$, das Element $\frac{1}{2}$ stets im Zentrum steht.*

Definition 1.13. *Als Palindrom bezeichnet man Darstellungen, die sowohl von vorne als auch von hinten gleich gelesen werden. Beispiele dafür sind das Wort "Rentner" oder die Zahl 1001.*

Theorem 1.14. *Die Folge der Nenner jeder Farey-Folge F_n bildet ein Palindrom.*

Beweis. F_1 hat die Nenner $(1, 1)$ dies bildet ein Palindrom. Gleiches gilt für F_2 mit $(1, 2, 1)$. Sei $\frac{j}{n}$ mit $\frac{0}{1} < \frac{j}{n} < \frac{1}{2}$ ein neues Element in F_n mit $n > 2$. Aus Theorem 1.11 können wir folgern, dass dann ein weiteres Element $\frac{n-j}{n}$ mit $\frac{1}{2} < \frac{n-j}{n} < \frac{1}{1}$ existiert, da $\text{ggT}(j, n) = \text{ggT}(n - j, n) = 1$. Der Abstand k zwischen $\frac{j}{n}$ und $\frac{0}{1}$ entspricht dem Abstand von $\frac{n-j}{n}$ und $\frac{1}{1}$. Damit gibt es zu jedem neuen Element $\frac{j}{n}$ ein zum Element $\frac{1}{2}$ symmetrisches Element $\frac{n-j}{n}$, womit jede neue Folge in F_n ein Palindrom darstellt. \square

Hilfssatz 1.15. Für zwei ganze Zahlen n und k gilt:

$$\sum_{\substack{\text{ggT}(k,n)=1 \\ 1 \leq k \leq n}} k = \frac{n\phi(n)}{2}.$$

Beweis. Sei

$$S_n = \sum_{\substack{\text{ggT}(k,n)=1 \\ 1 \leq k \leq n}} k$$

Wenn k, n teilerfremd sind, dann sind auch $n - k$ und n teilerfremd, dies können wir nutzen, um k mit $n - k$ zu substituieren.

$$S_n = \sum_{\substack{\text{ggT}(n-k,n)=1 \\ 1 \leq n-k \leq n}} n - k = \sum_{\substack{\text{ggT}(k,n)=1 \\ 1 \leq k \leq n}} n - k.$$

Addieren wir die beiden Ausdrücke:

$$2S_n = \sum_{\substack{\text{ggT}(k,n)=1 \\ 1 \leq k \leq n}} n - k + k \implies 2S_n = \sum_{\substack{\text{ggT}(k,n)=1 \\ 1 \leq k \leq n}} n \implies 2S_n = n\phi(n).$$

□

Theorem 1.16. In jeder Farey-Folge ist die Summe aller Nenner doppelt so groß wie die Summe der Zähler.

Beweis. Wir nutzen vollständige Induktion über n . Sei N_n die Summe der Nenner der n -ten Farey-Folge, analog ist Z_n die Summe der Zähler. Für $n = 1$ haben wir $N_n = 2$ und $Z_n = 1$. Also gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen die Aussage gilt für $n - 1$. Wir zeigen nun, dass die Aussage für n gilt. Die Summe der Zähler von F_{n-1} zu F_n steigt um die die Summe der Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$, welche teilerfremd zu n sind.

$$Z_n = Z_{n-1} + \sum_{\substack{\text{ggT}(k,n)=1 \\ 1 \leq k \leq n}} k.$$

Nach Hilfssatz 2 gilt

$$Z_n = Z_{n-1} + \frac{n\phi(n)}{2}.$$

Analog steigt die Summe der Nenner um die Anzahl $n\phi(n)$, da es $\phi(n)$ neue Elemente mit dem Nenner n gibt.

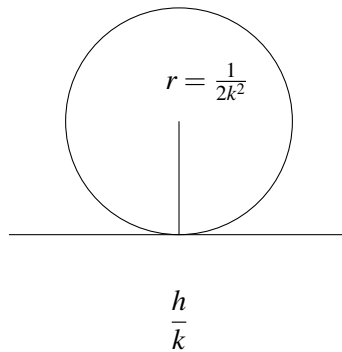
$$N_n = N_{n-1} + n\phi(n) \stackrel{IV}{=} 2Z_{n-1} + n\phi(n) = 2\left(Z_{n-1} + \frac{n\phi(n)}{2}\right) = 2Z_n.$$

□

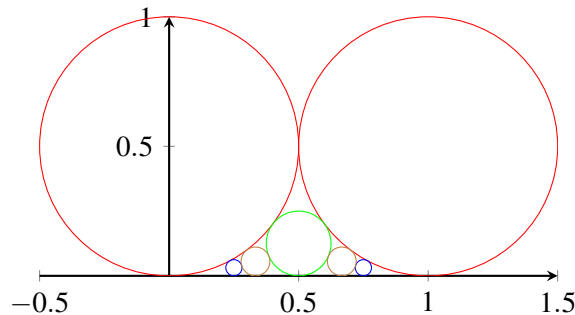
2. FORD-KREISE

2.1. Motivation und Definition. Im folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns weiterhin mit rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$. Für jeden gekürzten Bruch $\frac{h}{k}$ können wir einen sogenannten Ford-Kreis definieren, welcher tangential zum Punkt $\frac{h}{k}$ der reellen Achse ist. Benannt sind diese Kreise nach dem US-amerikanischen Mathematiker Lester R. Ford, welcher im Jahr 1938 einen Artikel [5] zu diesen Kreisen veröffentlicht hat. Bereits dort erwähnte er die Farey-Folgen und benannte ihre Verbindungen zu den Ford-Kreisen. Seitdem wurden die Ford-Kreise in verschiedenen Gebieten verwendet, darunter auch für den Beweis der Rademacher's Formel. Das folgende Kapitel basiert auf der Literatur von [6], [2].

Definition 2.1. Gegeben sei ein Bruch $\frac{h}{k}$ mit $\text{ggT}(h, k) = 1$ und $k > 0$. Der zugehörige Ford-Kreis wird mit $C(h, k)$ bezeichnet. Er hat den Radius $\frac{1}{2k^2}$ und sein Zentrum liegt im Punkt $(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2})$.

Abbildung 1: $C(h, k)$

Definition 2.2. C_n beschreibt die Menge der Ford-Kreise $C(h, k)$ mit $0 \leq \frac{h}{k} \leq 1$ und $r \geq \frac{1}{2n^2}$.

Abbildung 2: C_4 .

Zeichnet man eine Menge von Ford-Kreisen, wird ihre Verbindung zur Farey-Folge deutlich. Betrachten wir Abbildung 2, sieht man C_4 , welches die Kreise $C(0, 1), C(1, 4), C(1, 3), C(1, 2), C(2, 3), C(3, 4), C(1, 1)$ beinhaltet. Dies sollte uns bekannt vorkommen, denn dies entspricht

$$F_4 = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Genau wie mit der Farey-Folge lässt sich die nächste Menge an Ford-Kreisen C_n aus ihrem Vorgänger C_{n-1} bestimmen. Dabei ergänzt man C_{n-1} mit Kreisen des Durchmessers $\frac{1}{2n^2}$.

Beispiel 2.3. Ausgehend von C_4 , wollen wir nun C_5 konstruieren, dabei behalten wir sämtliche Kreise bei und ergänzen Kreise des Radius $r = \frac{1}{50}$. Ein Blick in die 5-te Farey-Folge verrät uns, welche Kreise noch fehlen.

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right)$$

Ergänzen wir diese nach Vorschrift, erhalten wir C_5 .

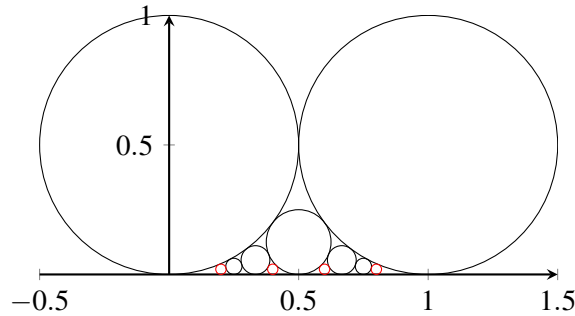


Abbildung 3: C_5 .

2.2. Eigenschaften von Ford-Kreisen.

Theorem 2.4. Zwei Ford Kreise $C(a, b)$ und $C(c, d)$ sind disjunkt, können sich jedoch berühren. Sie berühren sich genau dann, wenn $bc - ad = \pm 1$.

Beweis. Sei r_1 der Radius von $C(a, b)$ und r_2 der Radius von $C(c, d)$. Wir bestimmen den Abstand der Mittelpunkte zweier Ford-Kreise mittels Satz des Pythagoras (siehe Abbildung 4):

$$x^2 = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2} \right)^2.$$

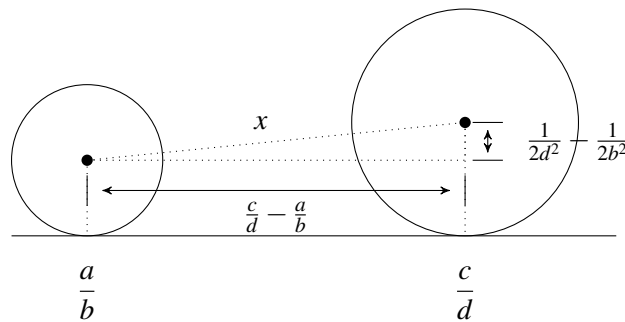


Abbildung 4.

Analog ist das Quadrat der Radien

$$(r_1 + r_2)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2} \right)^2.$$

Bestimmen wir nun die Differenz $x^2 - (r_1 + r_2)^2$, erhalten wir

$$x^2 - (r_1 + r_2)^2 = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2} \right)^2 = \frac{(bc - ad)^2 - 1}{b^2 d^2} \geq 0.$$

Damit wurde gezeigt, dass zwei Ford-Kreise niemals überlappen und tangente für $(bc - ad)^2 = 1$ sind. \square

Anmerkung 2.5. Man beobachtet, dass die Information der "Nachbarn" einer Farey-Folge erhalten wird. Wir haben gezeigt, dass zwei Elemente einer Farey-Folge nur in maximal endlich vielen Farey-Folgen nacheinander folgen können (Theorem 1.6), jedoch bleiben die entsprechenden Ford-Kreise stets tangential.

Theorem 2.6. Zwei tangente Ford-Kreise $C(a, b)$ und $C(c, d)$ berühren sich im Punkt

$$S = \left(\frac{ab + cd}{b^2 + d^2}, \frac{1}{b^2 + d^2} \right).$$

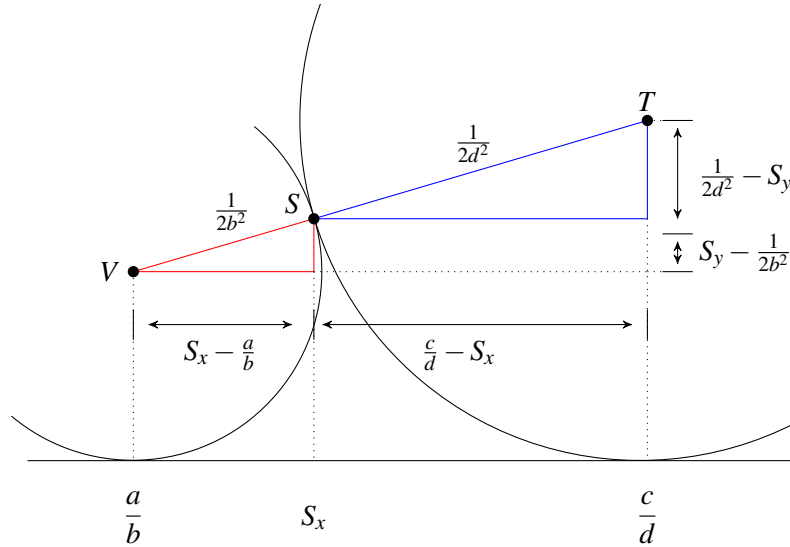


Abbildung 5.

Beweis. Betrachten wir Abbildung 5; wir behaupten das rote und blaue Dreieck sind ähnlich. Nach den Ähnlichkeitssätzen genügt es zu zeigen, dass die Winkel der Dreiecke übereinstimmen. Die Winkel in den Punkten S (rotes Dreieck) und T werden beide von der Strecke \overline{VT} und zwei parallelen Strecken aufgezogen, demnach sind sie Stufenwinkel und gleich groß. Gleiches gilt für die Winkel in den Punkten V und S (blaues Dreieck). Die letzten Winkel sind notwendigerweise identisch, da sonst die Innenwinkelsumme von 180° verletzt wäre. Damit haben wir gezeigt, dass alle Verhältnisse zweier entsprechender Seiten übereinstimmen. Formulieren wir das in einer Gleichung, erhalten wir

$$\frac{\frac{c}{d} - S_x}{S_x - \frac{a}{b}} = \frac{\frac{1}{2d^2}}{\frac{1}{2b^2}} = \frac{2b^2}{2d^2} \quad \implies \quad S_x = \frac{ab + cd}{b^2 + d^2}.$$

Analog berechnen wir S_y mit folgender Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{2d^2} - S_y}{S_y - \frac{1}{2b^2}} = \frac{\frac{1}{2d^2}}{\frac{1}{2b^2}} = \frac{2b^2}{2d^2} \quad \implies \quad S_y = \frac{1}{b^2 + d^2}.$$

□

Theorem 2.7. Wenn $C(a,b)$ und $C(c,d)$ tangential sind, dann ist $C(a+c, b+d)$ der Ford-Kreis, der sowohl $C(a,b)$, $C(c,d)$ als auch die reelle Achse berührt.

Beweis. Aus Anmerkung 1.7 geht hervor, dass der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ vollständig gekürzt vorliegen muss, das heißt, es existiert ein dazugehöriger Ford-Kreis. Analog zu der Farey-Folge müssen wir folgendes zeigen:

$$(a+c)b - (b+d)a = \pm 1 \text{ für die Ford-Kreise } C(a,b), C(a+c, b+d) \text{ und}$$

$$(b+d)c - (a+c)d = \pm 1 \text{ für } C(c,d), C(a+c, b+d).$$

Wir wissen bereits, dass diese Eigenschaft an den Medianen vererbt wird, wenn die ursprünglichen Elemente diese Eigenschaft besaßen (Theorem 1.8). $C(a,b)$ und $C(c,d)$ sind nach Voraussetzung tangential zueinander und erfüllen somit diese Eigenschaft, somit ist auch $C(a+c, b+d)$ tangential zu $C(a,b)$ und $C(c,d)$. \square

Definition 2.8 (Pythagoreisches Tripel). Als *pythagoreisches Tripel* bezeichnet man eine Menge von drei natürlichen Zahlen, welche als Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks vorkommen können. Beispiele hierfür sind $(3,4,5)$, $(5,12,13)$ und $(8,15,17)$.

Anmerkung 2.9. Betrachten wir die Dreiecke in Abbildung 6 und berechnen die Seitenlängen für diese, fällt auf, dass sie mit pythagoreischen Tripeln übereinstimmen. Dabei entspricht jedes Dreieck einem anderen pythagoreischen Tripel.

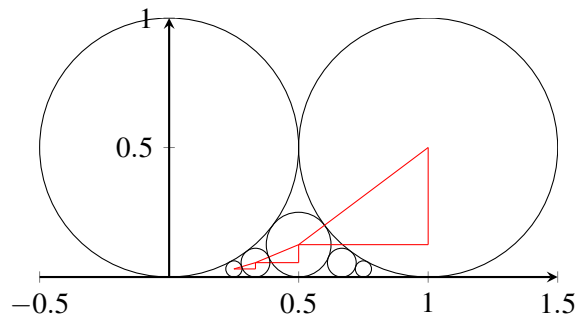


Abbildung 6: Pythagoreisches Tripel.

Beispiel 2.10 (für das größte Dreieck in Abb. 6).

$$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

$$S_3^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{4}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} \Rightarrow S_3 = \frac{5}{8}$$

Damit erhalten wir den pythagoreischen Tripel $\left(\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}\right)$.

3. FIBONACCI UND DER GOLDENE SCHNITT

3.1. Einführung.

Definition 3.1. [7][Fibonacci-Folge] Die Fibonacci-Folge ist eine unendliche Folge natürlicher Zahlen. Sei f_n das n -te Glied der Fibonacci-Folge, dann ist dieses wie folgt definiert:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad \text{und für } n \geq 1 \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Folglich lauten die ersten Fibonacci-Zahlen

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \quad 144 \quad 233 \quad \dots$$

Definition 3.2. [7][Goldener Schnitt] Wir definieren den Goldenen Schnitt als:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Φ entspricht damit einer Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die zweite Lösung setzen wir $\Psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Anmerkung 3.3. Für $x = \frac{a}{b}$ mit $a > b$ erhalten wir folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= 0 \\ x - 1 - \frac{1}{x} &= 0 \\ \frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} &= 0 \\ \Phi = \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{a}. \end{aligned}$$

Wir erhalten ein Teilungsverhältnis, bei dem die Strecke $\overline{a+b}$ im gleichen Verhältnis zu \bar{a} steht wie \bar{a} zu \bar{b} . Nach [8] ist dieses Verhältnis der Menschheit schon seit der Antike bekannt. Sie hat ihren Ursprung in der Natur und findet sich seitdem auch in der Kunst und der Architektur wieder.

Hilfssatz 3.4 (Formel von Moivre-Binet). Folgende Formel liefert jede beliebige Fibonacci-Zahl f_n :

$$f_n = \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Beweis. Wir nutzen vollständige Induktion über n . Die Formel gilt für f_0 und f_1 :

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\Phi^0 - \Psi^0}{\sqrt{5}} = \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0 \\ f_1 &= \frac{\Phi^1 - \Psi^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1. \end{aligned}$$

Angenommen, die Aussage gilt für n und $n-1$. Es gilt zu zeigen, dass die Aussage dann auch für $n+1$ gilt:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \stackrel{IV}{=} \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^{n-1} - \Psi^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\Phi} + 1 \right) - \frac{\Psi^n}{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{\Psi} \right).$$

Wir wissen, dass sowohl Φ als auch Ψ Lösungen der Gleichung $x - 1 - \frac{1}{x} = 0$ sind, deshalb gelten die Gleichungen $\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1$ und $\Psi = 1 + \frac{1}{\Psi}$. Wir folgern

$$f_{n+1} = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\Phi} + 1 \right) - \frac{\Psi^n}{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{\Psi} \right) = \frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

□

Anmerkung 3.5. Weil $|\Psi| < 1$, konvergiert der Wert von Ψ^n schnell gegen 0, weshalb schon für kleine Werte von n folgende Abschätzung gilt:

$$f_n \sim \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}.$$

Beispiel 3.6.

$$n = 1 \longrightarrow f_1 \sim \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \approx 0.7236$$

$$n = 5 \longrightarrow f_5 \sim \frac{\Phi^5}{\sqrt{5}} \approx 4.9597$$

$$n = 10 \longrightarrow f_{10} \sim \frac{\Phi^{10}}{\sqrt{5}} \approx 55,0036$$

Bereits für $n = 10$ hat die Abschätzung eine Genauigkeit von 10^{-2} .

Theorem 3.7. Der Quotient aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen konvergiert gegen den Goldenen Schnitt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi.$$

Beweis. Nach der Formel von Moivre-Binet lässt sich der Quotient wie folgt umformulieren:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\Phi^n - \Psi^n} = \frac{(\Phi^{n+1} - \Phi\Psi^n) + (\Phi\Psi^n - \Psi^{n+1})}{\Phi^n - \Psi^n} = \Phi + \frac{\Psi^n(\Phi - \Psi)}{\Phi^n - \Psi^n} = \Phi + \frac{\Phi - \Psi}{\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^n + 1}.$$

Es gilt $|\Phi| > |\Psi| \implies \left|\frac{\Phi}{\Psi}\right| > 1$, und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Phi + \frac{\Phi - \Psi}{\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^n + 1}\right) = \Phi$. □

3.2. Ford und Fibonacci. Im folgenden Abschnitt betrachten wir die in Abbildung 7 markierten Schnittpunkte einiger Ford-Kreise. Diese Inhalte basieren auf der Literatur von [9].

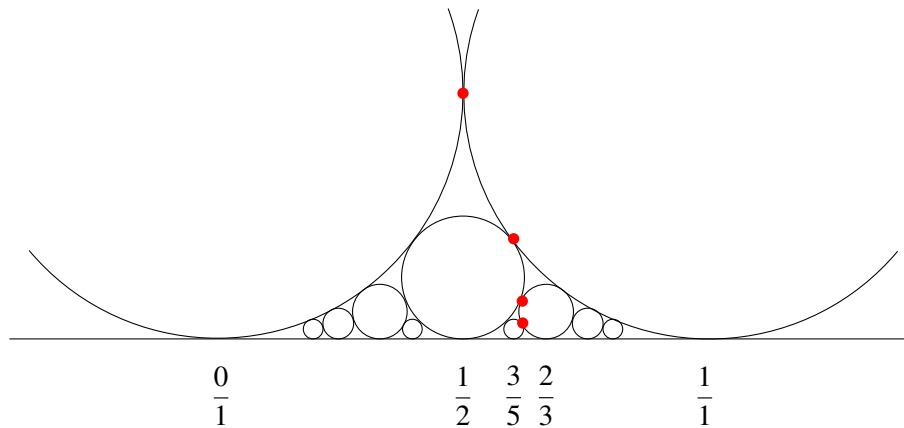


Abbildung 7.

Überträgt man diese Schnittpunkte in ein Koordinatensystem, fällt auf, dass diese auf der Kreislinie eines noch größeren Kreises liegen könnten.

Definition 3.8. Wir definieren diesen Kreis κ nun als denjenigen Kreis, der durch die Punkte $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ geht.

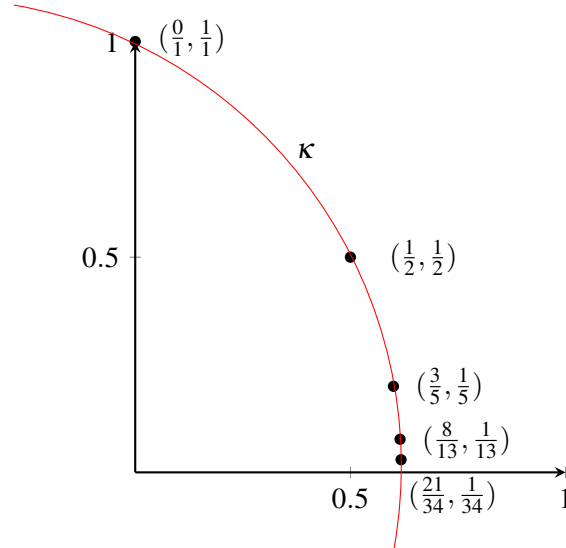


Abbildung 8.

Anmerkung 3.9. Der Punkt $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$ entspricht dem Schnittpunkt zwischen $C(0, 1)$ und $C(1, 0)$, wobei $C(1, 0)$ als Kreis mit dem Radius ∞ definiert ist. Praktisch entspricht $C(1, 0)$ einer Horizontalen mit $y = 1$ (siehe Abbildung 9).

Theorem 3.10. Der Kreis κ hat den Mittelpunkt $(-\frac{1}{2}, 0)$ und den Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$, seine Schnittpunkte mit der x -Achse sind Φ^{-1} und $-\Phi$.

Beweis. Nach Definition von κ liegen die Punkte $P_1 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$, $P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $P_3 = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ auf κ . Die allgemeine Kreisgleichung lautet:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

wobei (h, k) dem Mittelpunkt und r dem Radius des Kreises entspricht. Im nächsten Schritt nutzen wir die Punkte, um mithilfe eines linearen Gleichungssystems die fehlenden Variablen zu bestimmen.

$$(1): (0 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$$

$$(2): \left(\frac{1}{2} - h\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - k\right)^2 = r^2$$

$$(3): \left(\frac{3}{5} - h\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - k\right)^2 = r^2$$

$$\implies h = -\frac{1}{2} \quad k = 0 \quad r = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\implies \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}.$$

Für $y = 0$ erhalten wir

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\Phi \quad x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \Phi^{-1}.$$

□

Anmerkung 3.11. Die Punkte $(\frac{8}{13}, \frac{1}{13})$ und $(\frac{21}{34}, \frac{1}{34})$ liegen auch auf κ .

Um das Gesamtbild zu vervollständigen, betrachten wir im folgenden Abschnitt nicht mehr das Intervall $[0,1]$, sondern betrachten ganz \mathbb{Q} . Im weiteren Verlauf ergänzen wir die Fibonacci-Folge, sodass diese für alle Zahlen aus \mathbb{Z} definiert ist. Die Folgeglieder aus \mathbb{Z}^+ bleiben gleich, lediglich die Folgeglieder aus \mathbb{Z}^- werden mittels folgender Vorschrift ergänzt:

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n.$$

Die ersten Elemente sehen somit folgendermaßen aus, wobei 0 der Startpunkt der klassischen Fibonacci-Folge entspricht.

$$\dots \quad -55 \quad 34 \quad -21 \quad 13 \quad -8 \quad 5 \quad -3 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad \underbrace{0}_{f_0} \quad \dots$$

Anmerkung 3.12. Die Fibonacci-Rekursion gilt auch im Negativen.

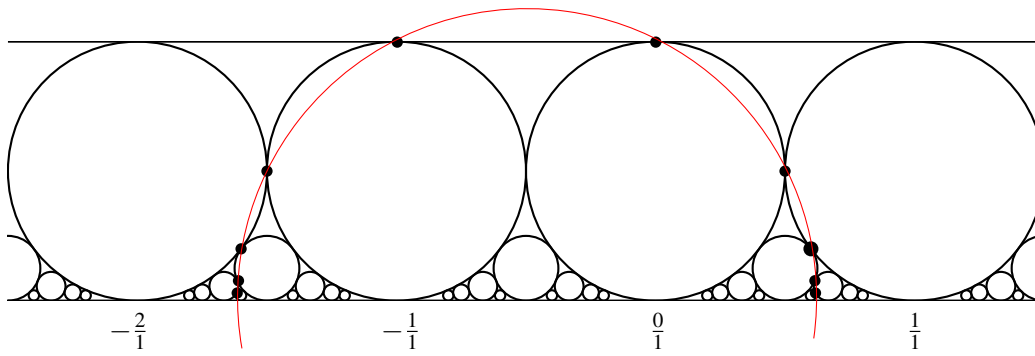


Abbildung 9.

Anmerkung 3.13. Die Formel von Moivre-Binet ist auch für negative ganze Zahlen gültig:

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{-n} - \Psi^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Die letzte Gleichheit zeigen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} &= \frac{\Phi^{-n} - \Psi^{-n}}{\sqrt{5}} \\ (-1)^{n+1} (\Phi^n - \Psi^n) &= \frac{\Psi^n - \Phi^n}{\Phi^n \Psi^n} \\ (-1)^{n+2} \Phi^n \Psi^n &= 1 \\ (-1)^{n+2} (\Phi \Psi)^n &= 1 \\ (-1)^{2n+2} &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hilfssatz 3.14 (Beziehungen zwischen Fibonacci-Zahlen). Für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$$

$$f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} = f_{2n}.$$

Beweis. Wir zeigen die Identität in 1) mithilfe der in Hilfssatz 3.4 und 3.13 benannten Formel von Moivre-Binet:

$$\begin{aligned} f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 &= \frac{\Phi^{n-1} - \Psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\sqrt{5}} - \left(\frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{5} (\Phi^{2n} - \Phi^{n-1}\Psi^{n+1} - \Phi^{n+1}\Psi^{n-1} + \Psi^{2n} - \Phi^{2n} + 2\Phi^n\Psi^n - \Psi^{2n}) \\ &= \frac{1}{5} \left(\Phi^n\Psi^n \left(2 - \frac{1}{\Phi}\Psi - \Phi\frac{1}{\Psi} \right) \right) = (\Phi\Psi)^n = (-1)^n. \end{aligned}$$

Analog berechnen wir folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} f_n^2 + f_{n+1}^2 &= \left(\frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\sqrt{5}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{5} (\Phi^{2n} - 2\Phi^n\Psi^n + \Psi^{2n} + \Phi^{2n+2} - 2\Phi^{n+1}\Psi^{n+1} + \Psi^{2n+2}) \\ &= \frac{1}{5} \left(\left(\Phi^{2n+1} \left(\Phi + \frac{1}{\Phi} \right) - 2\Phi^n\Psi^n \left(\Phi\Psi + 1 \right) + \Psi^{2n+1} \left(\Psi + \frac{1}{\Psi} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{5} (\sqrt{5}\Phi^{2n+1} - \sqrt{5}\Psi^{2n+1}) = \frac{\Phi^{2n+1} - \Psi^{2n+1}}{\sqrt{5}} = f_{2n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} &= \frac{\Phi^{n-1} - \Psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} \frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{5} (\Phi^{2n-1} - \Phi^{n-1}\Psi^n - \Phi^n\Psi^{n-1} + \Psi^{2n-1} + \Phi^{2n+1} - \Phi^n\Psi^{n+1} - \Phi^{n+1}\Psi^n + \Psi^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{5} \left(\left(\Phi^{2n} \left(\Phi + \frac{1}{\Phi} \right) - \Phi^n\Psi^n \left(\Phi + \frac{1}{\Phi} + \Psi + \frac{1}{\Psi} \right) + \Psi^{2n} \left(\Psi + \frac{1}{\Psi} \right) \right) \right) \\ &= \frac{\Phi^{2n} - \Psi^{2n}}{\sqrt{5}} = f_{2n}. \end{aligned}$$

□

Betrachtet man die x -Koordinaten der Schnittpunkte in Abbildung 8 genauer, fällt auf, dass diese stets zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen repräsentieren.

$$\begin{array}{cccccc} \underbrace{0 \quad 1} & \underbrace{1 \quad 2} & \underbrace{3 \quad 5} & \underbrace{8 \quad 13} & \underbrace{21 \quad 34} & \dots \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{8}{13} & \frac{21}{34} & \end{array}$$

Diese Koordinaten sind also

$$\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n+1}}, \frac{1}{f_{2n+1}} \right).$$

Theorem 3.15. *Jeder Punkt mit den Koordinaten $(\frac{f_{2n}}{f_{2n+1}}, \frac{1}{f_{2n+1}})$ mit $n \in \mathbb{Z}$ liegt auf dem Kreis κ .*

Beweis. Es gilt zu zeigen, dass folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt,

$$\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Wir starten mit Hilfssatz 3.14:

$$\begin{aligned} f_{2n}f_{2n+2} - f_{2n+1}^2 &= (-1)^{2n+1} = -1 \\ f_{2n}(f_{2n} + f_{2n+1}) - f_{2n+1}^2 &= -1 \\ f_{2n}^2 + f_{2n}f_{2n+1} - f_{2n+1}^2 &= -1 \\ \frac{f_{2n}^2}{f_{2n+1}^2} + \frac{f_{2n}}{f_{2n+1}} \underbrace{-1}_{=\frac{1}{4} - \frac{5}{4}} &= -\frac{1}{f_{2n+1}^2} \\ \frac{f_{2n}^2}{f_{2n+1}^2} + \frac{f_{2n}}{f_{2n+1}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{f_{2n+1}^2} &= \frac{5}{4} \\ \Rightarrow \left(\frac{f_{2n}}{f_{2n+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Theorem 3.16. *Aufeinanderfolgende Ford-Kreise der Form $C(f_n, f_{n+1})$ berühren einander, außerdem liegen die Schnittpunkte dieser Ford-Kreise auf dem Kreis κ .*

Beweis. Nach Theorem 2.4 genügt es zu zeigen, dass zwei Ford-Kreise $C(f_{n+1}, f_{n+2})$ und $C(f_n, f_{n+1})$ die Gleichung

$$f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = \pm 1 \quad \text{erfüllen.}$$

Dies gilt nach Hilfssatz 3.14.

Als nächstes zeigen wir, dass die Schnittpunkte der Kreise der Form $C(f_n, f_{n+1})$ auf dem Kreis κ liegen. Nach Theorem 2.6 berühren sich zwei tangente Kreise im Punkt

$$S = \left(\frac{ab+cd}{b^2+d^2}, \frac{1}{b^2+d^2}\right).$$

Für Ford-Kreise der Form $C(f_n, f_{n+1})$ entspricht dies

$$\left(\frac{f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1}}{f_n^2 + f_{n+1}^2}, \frac{1}{f_n^2 + f_{n+1}^2}\right).$$

Mithilfe der Identitäten aus Hilfssatz 3.14 erhalten wir

$$\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n+1}}, \frac{1}{f_{2n+1}}\right)$$

und benutzen schließlich Theorem 3.15. □

Im folgenden Abschnitt untersuchen wir, ob es neben dem Kreis κ weitere Kreise gibt, welche eine Verbindung zu den Fibonacci-Zahlen vorweisen. Betrachten wir Abbildung 9, liegt die Vermutung nahe, dass aufgrund der Symmetrien der Ford-Kreise die Verschiebung des Kreises κ auf der x -Achse um einen beliebigen Wert n mit $n \in \mathbb{Z}$ solche Eigenschaften vorweist. Verschieben wir den Kreis κ um 1 in positive Richtung, erhalten wir

$$\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n+1}} + 1, \frac{1}{f_{2n+1}}\right) = \left(\frac{f_{2n+2}}{f_{2n+1}}, \frac{1}{f_{2n+1}}\right)$$

für die entsprechenden Schnittpunkte der Ford-Kreise. Diese liegen trivialerweise auf einem gemeinsamen Kreis mit Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$ mit dem Mittelpunkt $(-\frac{1}{2} + 1, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$.

Die Schnittpunkte mit der x -Achse sind entsprechend $\Phi^{-1} + 1 = \Phi$ und $-\Phi + 1 = \Psi$. Vergleicht man die x -Werte des neuen Kreises mit dem von κ , erkennt man, dass diese negative voneinander sind, dies sollte uns aber nicht überraschen, da die Kreise entsprechende Spiegelungen an der y -Achse sind.

Definition 3.17. Von nun an bezeichnen wir jeden neuen Kreis, welcher einer Verschiebung von κ um $(n, 0)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ entspricht, als κ_n . Der Kreis κ_n hat stets den Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$ und den Mittelpunkt $(-\frac{1}{2} + n, 0)$. Die Punkte der Form $(\frac{f_{2n+n} \cdot f_{2n+1}}{f_{2n+1}}, \frac{1}{f_{2n+1}})$ liegen auf dem Kreis und seine Schnittpunkte mit der x -Achse sind $\Phi^{-1} + n$ und $-\Phi + n$.

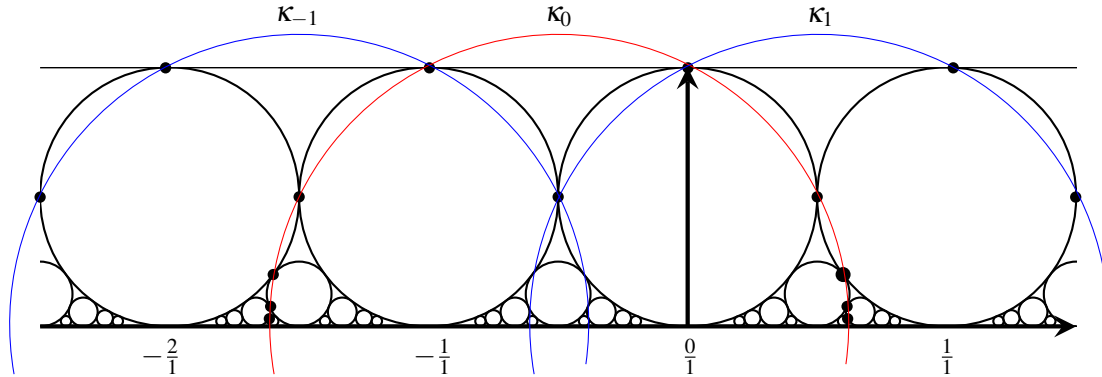


Abbildung 10.

Wie bereits erwähnt, gilt für alle Punkte der entsprechenden Kreise $|\kappa_0| = |\kappa_1|$. In Abbildung 10 sieht man, dass es zu jedem Kreis κ_n mit $n \in \mathbb{N}^*$ ein Kreis $\kappa_{(1-n)}$ existiert, für dessen Punkte stets $|\kappa_n| = |\kappa_{(1-n)}|$ gilt. Bei Betrachtung der Kreise, fällt auf, dass nur die Kreise κ_i mit $i = \{-1, 0, 1, 2\}$ eine direkte Verbindung zur Fibonacci-Folge aufweisen, denn der Term $f_{2n} + i \cdot f_{2n+1}$ entspricht nur für $i = \{-1, 0, 1, 2\}$ notwendigerweise einer weiteren Fibonacci-Zahl. Dies spiegelt sich auch in den Schnittpunkten mit der x -Achse wieder, nur die Kreise κ_i mit $i = \{-1, 0, 1, 2\}$ weisen eine Potenz von Φ als Schnittpunkt auf. Dies sollte uns nicht überraschen, da wir in Theorem 3.7 bereits gezeigt haben, dass der Quotient aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen Φ konvergiert. Verschiedene Quotienten von Fibonacci-Zahlen konvergieren gegen verschiedene Potenzen von Φ . Betrachten wir Abbildung 11, erkennt man wie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{f_{2n}}{f_{2n+1}}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen den Wert Φ^{-1} konvergiert. Ähnliches sieht man für die bereits genannten Kreise; entspricht der Quotient nicht mehr dem von zwei Fibonacci-Zahlen, geht diese Eigenschaft verloren.

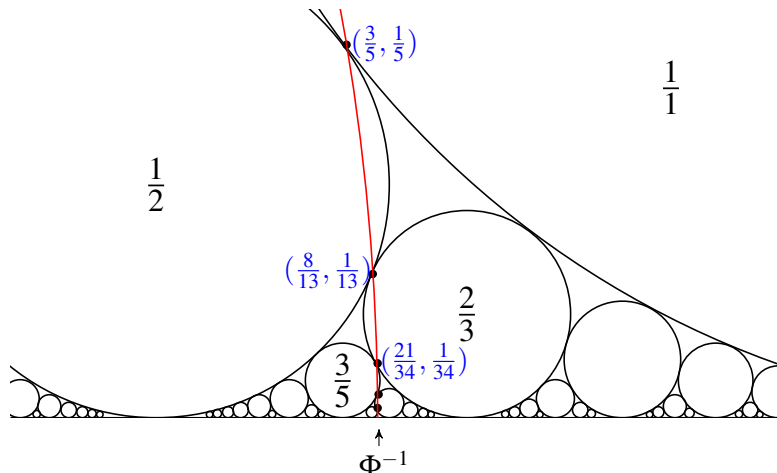


Abbildung 11.

4. AUSBLICK

Das Themengebiet der Farey-Folge und der Ford-Kreise umfasst viele weitere Möglichkeiten, welche keinen Platz mehr in diese Ausarbeitung gefunden haben. Ich möchte diesen letzten Abschnitt nutzen, um noch einen Ausblick für nachfolgende Untersuchungen zu geben.

4.1. Ford-Kugeln. Das Konzept der Ford-Kreise lässt sich in ein dreidimensionales Modell übertragen. L.R. Ford beschrieb Ford-Kugeln in seiner Arbeit [5] wie folgt: Zuerst erweitern wir die Zahlenmenge auf die komplexen Zahlen, genauer auf eine Teilmenge von diesen, $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$, mit $i = \sqrt{-1}$. Betrachten wir einen Bruch $\frac{h}{k}$ mit $h, k \in \mathbb{Q}(i)$, lässt sich dieser aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathbb{Q}(i)$ in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$ überführen:

$$\frac{h}{k} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Gegeben sei ein Bruch $\frac{h}{k} = p + iq$, welcher einem Punkt in der komplexen Zahlenebene entspricht. Dieser Punkt soll dem Berührungspunkt zwischen Ford-Kugel und der komplexen Zahlenebene entsprechen. Ergänzen wir diese Ebene um eine weitere Achse (z), können wir die sogenannten Ford-Kugeln wie in Abbildung 12 darstellen. Analog zu den Ford-Kreisen hat eine Ford-Kugel $\frac{h}{k}$ einen Radius von $\frac{1}{2|k|^2}$. Es stellt sich nun die Frage, welche Gemeinsamkeiten es zwischen Ford-Kreisen und Ford-Kugeln gibt und welche Besonderheiten vorliegen. Weitere Informationen zu dem Thema finden sich unter anderem in [10] und [11].

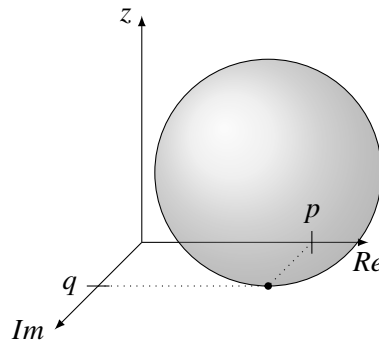


Abbildung 12. Ford-Kugel

LITERATUR

- [1] J. F. Sen., "On a curious property of vulgar fractions," *Philosophical Magazine*, vol. 47, pp. 385–386.
- [2] T. M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory* -S. 97-101. Berlin Heidelberg: Springer Science, Business Media, 2012.
- [3] R. Saha, "Some special property of farey sequence," 2018, arXiv:1811.02768 (abgerufen am 21.09.2020).
- [4] K. Meyberg, *Algebra - Teil 1* - S. 43. München: Hanser, 1980.
- [5] L. R. Ford, "Fractions," *The American Mathematical Monthly*, vol. 45, no. 9, pp. 586–601, 1938, (abgerufen am 21.09.2020). [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2302799>
- [6] J. Ainsworth, M. Dawson, J. Pianta, and J. Warwick, "The farey sequence," 2012, (abgerufen am 21.09.2020). [Online]. Available: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/fareyproject.pdf>
- [7] R. A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers* - S.7-12. Singapur: World Scientific, 1997.
- [8] C. Brown, *Fibonacci Analysis* - S. 43-75. New York: John Wiley, Sons, 2010.
- [9] J. Kocik, "Fibonacci numbers and ford circles," 2020, arXiv:2003.00852 (abgerufen am 21.09.2020).
- [10] A. Haynes and K. Measures, "Higher moments of distances between consecutive ford spheres," 2018, arXiv:1809.09743 (abgerufen am 21.09.2020).
- [11] S. Northshield, "Ford circles and spheres," 2015, arXiv:1503.00813 (abgerufen am 21.09.2020).

Sämtliche Grafiken wurden mithilfe des LaTeX Pakets TikZ erstellt.

Name: Müller
Vorname: Michael
geb. am: 16.06.1998
Matr.-Nr: 5182337

Ich erkläre gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Universität als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

28.05.2020

Datum



(Michael Müller)